

Αναλογικές Τηλεπικοινωνίες

Σημειώσεις από τις παραδόσεις

Για τον κώδικα σε \LaTeX , ενημερώσεις και προτάσεις:

<https://github.com/kongr45gpen/ece-notes>

Οκτώβριος-Ιανουάριος 2017-2018

Τελευταία ενημέρωση: 7 Νοεμβρίου 2018

Λάθη & Διορθώσεις

Οι τελευταίες εκδόσεις των σημειώσεων βρίσκονται στο Github (<https://github.com/kongr45gpen/ece-notes/raw/master/atelecom.pdf>) ή στη διεύθυνση <http://helit.org/ece-notes/atelecom.pdf>.

Περιέχουν διορθώσεις σε λάθη και τυχόν βελτιώσεις.

Μπορείτε να ενημερώνετε για οποιοδήποτε λάθος και πρόταση μέσω PM στο forum, issue στο Github, ή οποιοδήποτε άλλου τρόπου!

Εγγραφή στη λίστα

Μήνυμα στο dimakis@auth.gr με θέμα *Αναλογικές Τηλεπικοινωνίες*.

Στη λίστα θα στέλνονται ασκήσεις χρήσιμες για τις εξετάσεις και λοιπές ανακοινώσεις.

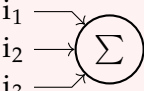
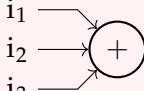
Εξετάσεις: Όλα ανοιχτά.

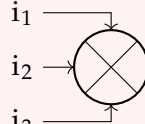
Το μάθημα γίνεται με βάση το βιβλίο του Haykin.

Ιστοσελίδα Ασκήσεων: <http://genesis.ee.auth.gr/dimakis/greek/courses/telesysI>

Προσοχή στο συμβολισμό!

Σε αντίθεση με τα ΣΑΕ, τα διαγράμματα των Αναλογικών Τηλεπικοινωνιών περιέχουν **αθροιστές** και **πολλαπλασιαστές** που εκφράζονται ως εξής:

• **Αθροιστής:**  ή  $o = i_1 + i_2 + i_3$

• **Πολλαπλασιαστής:**  $o = i_1 \cdot i_2 \cdot i_3$

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	3
1.1	Βασικές έννοιες	4
2	Διαμόρφωση Πλάτους	5
2.1	AM	5
2.1.1	Για ημιτονοειδή είσοδο	7
2.1.2	Ισχύς	8
2.1.3	Διαμορφωτής AM	9
2.1.4	Φωρατής περιβάλλουσας / Αποδιαμορφωτής AM	11
2.1.5	Και άλλοι αποδιαμορφωτές	13
2.2	DSB-SC	14
2.2.1	Στο δρόμο για την κατανάλωση λιγότερης ισχύος	14
2.2.2	Αποδιαμορφωτής	15
2.2.3	Δακτυλιοειδής διαμορφωτής (ring modulator)	16
2.2.4	Δέκτης Costas	17
2.2.5	Ισχύς	17
2.3	QAM	19
2.4	SSB	20
2.4.1	Μία τεχνική αποκοπής συχνότητας	22
2.4.2	Μελέτη στο πεδίο του χρόνου	23
2.4.3	Μετασχηματισμός Hilbert	24
2.4.4	Επιστροφή στο πεδίο των συχνοτήτων	25
2.4.5	Αποδιαμόρφωση	26
2.5	VSB	27
2.5.1	Λίγα λόγια για την τηλεόραση	29
2.6	Εφαρμογές	30
2.7	Ένα μαθηματικό ερώτημα που τέθηκε παραπάνω	36
2.8	Ασκήσεις	36
3	Διαμόρφωση Γωνίας	48
3.1	Βασικοί ορισμοί	48
3.1.1	Διαμορφώσεις PM & AM	49
3.1.2	Ισχύς	49
3.1.3	Δυναμικότητα των διαμορφώσεων	51
3.2	FM	51
3.2.1	NBFM	52
3.2.2	Στο φάσμα της συχνότητας	54
3.3	Υλοποίηση ενός συστήματος FM	58
3.3.1	Διαμορφωτής	59
3.3.2	Διαμορφωτής με NBFM	60
3.3.3	Υλοποίηση PLL (Phase-Locked Loop) με διαμορφωτή FM	60
3.3.4	Αποδιαμόρφωση FM	61
3.3.5	Διευκρινιστής συχνότητας	61
3.4	Στερεοφωνικό FM	63
3.5	Ασκήσεις	65
	Γλωσσάρι	69

Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή

Επικοινωνία είναι η μεταφορά μηνυμάτων, που μπορεί να έχουν τη μορφή απλών συμβόλων / φθόγγων ή πιο περίπλοκων μηνυμάτων.

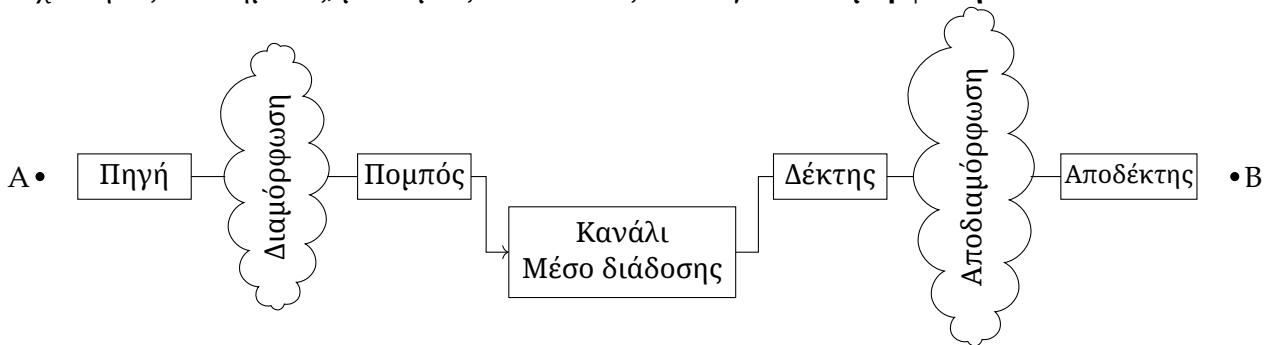
Για τον μηχανικό, επικοινωνία είναι η μετάδοση ή μεταφορά πληροφορίας από ένα σημείο A σε ένα σημείο B του χώρου.

A • ----- • B

Την πληροφορία μπορούμε να την ορίσουμε ως ένα σύνολο ταξινομημένων συμβόλων, που μαζί ίσως σχηματίζουν μια λέξη, μια πρόταση, ή ένα νόημα. Ένας καλύτερος ορισμός έχει δοθεί από τον Shannon στη Θεωρία Πληροφοριών.

Μία ακόμα παράμετρος είναι ο χρόνος μεταφοράς της πληροφορίας, αν και συνήθως δεν μας ενδιαφέρει στις αναλογικές τηλεπικοινωνίες (δεδομένης της ταχύτητας του φωτός), εκτός αν προσπαθούμε να επικοινωνήσουμε με κάτι εκτός του πλανήτη.

Τα σήματα αυτά μπορούν να μεταφέρουν αριθμούς, κείμενο, εικόνα, ήχο, βίντεο, αρχεία κ.ά, και βρίσκονται σε σχετικά χαμηλές συχνότητες (**baseband**). Για παράδειγμα, το εύρος της ανθρώπινης φωνής που απαιτείται για να είναι καταληπτή είναι 300 Hz-3300 Hz, ενώ τα τηλεοπτικά σήματα κωδικοποιούνται σε συχνότητες έως 6 MHz. Τέτοιες συχνότητες όμως είναι δύσκολο να μεταδοθούν (αν π.χ. σκεφτούμε ότι οι συχνότητες αρκετών ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων ή του ορατού φωτός είναι της τάξης των GHz και THz). Επομένως, για να επιτύχει η επικοινωνία απαιτείται η αύξηση της συχνότητας του σήματος, μέσω μιας διαδικασίας που λέγεται **διαμόρφωση**.

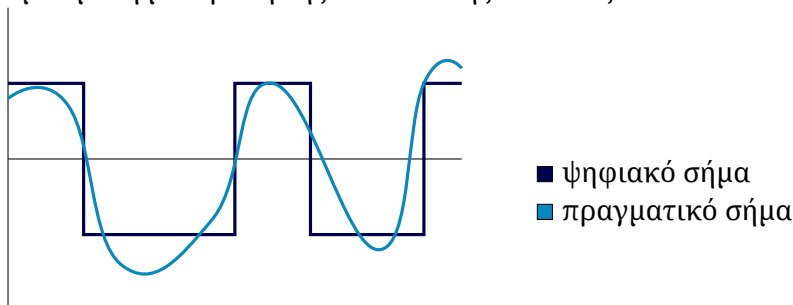
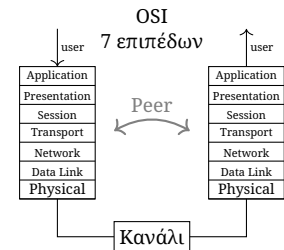


Η επιλογή της κατάλληλης συχνότητας του σήματος που θα στείλουμε από την κεραία, εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Για παράδειγμα, πιο χαμηλές συχνότητες (π.χ. AM) μπορούν να περάσουν μέσα από βουνά και εμπόδια, φτάνοντας σε μεγάλες αποστάσεις στον πλανήτη, και ακολουθώντας την καμπύλη της γης. Τα βραχέα μπορούν να χτυπήσουν στην ιονόσφαιρα και να ανακλαστούν για ακόμα μεγαλύτερη κάλυψη. Αντιθέτως, οι υψηλές συχνότητες (π.χ. FM) επιτρέπουν υψηλότερη ποιότητα μετάδοσης.

Για την κωδικοποίηση και αποκωδικοποίηση των δεδομένων, πρέπει ο πομπός και ο δέκτης να συμφωνήσουν σε ένα κοινό πρότυπο, για παράδειγμα στο TCP/IP ή το OSI 7 επιπέδων.

Σε αυτό το μάθημα μας ενδιαφέρει το φυσικό επίπεδο μόνο.

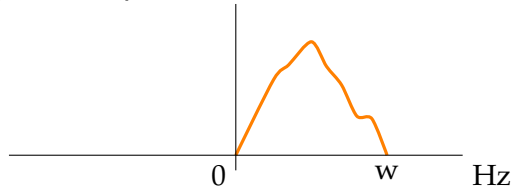
Οι ψηφιακές επικοινωνίες αναφέρονται σε ψηφιακά δεδομένα, αλλά πρακτικά η μετάδοση του σήματος μέσω των καναλιών (π.χ. ηλεκτρομαγνητικά κύματα) είναι αναλογική, αφού δεν γίνεται να έχουμε άμεση μετάβαση της κατάστασης από 0 ως 1:



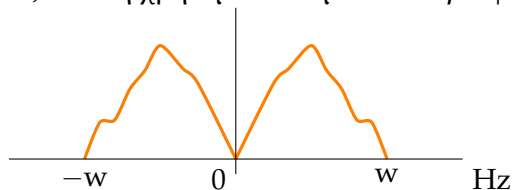
Πρακτικά οι αναλογικές τηλεπικοινωνίες χρησιμοποιούνται πλέον μόνο στους ραδιοφωνικούς σταθμούς FM (που αρχίζουν και αυτοί να καταργούνται), αλλά συνεχίζουμε να τις μελετάμε για λόγους ιστορικούς, διδακτικούς, και επειδή το σήμα όπως αναφέρθηκε παραπάνω είναι εν γένει αναλογικό. Στο νέο πρόγραμμα σπουδών δεν υπάρχει ακριβώς αυτό το μάθημα.

1.1 Βασικές έννοιες

Σήμα βασικής συχνότητας (baseband) Τα σήματα βασικής συχνότητας (**baseband**) προέρχονται από το αρχικό σήμα σε "χαμηλές" συχνότητες όπως αναφέρθηκε παραπάνω (συνήθως από 0 μέχρι π.χ. 20 kHz ή 6 MHz):



Η, επειδή χρησιμοποιούμε *δίπλευρα* φάσματα:



Η μέγιστη θετική συχνότητα w ορίζει το **εύρος ζώνης (bandwidth)** του σήματος.

Η διαδικασία που θα χρησιμοποιήσουμε για να αυξήσουμε τη συχνότητα του σήματος ονομάζεται **διαμόρφωση (modulation)**.

Συνήθως έχουμε μια **φέρουσα συχνότητα**:

$$c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$$

και πρέπει να βρούμε έναν τρόπο να προσθέσουμε σε αυτήν τις πληροφορίες του αρχικού σήματος. Στην παραπάνω εξίσωση έχουμε τρεις παραμέτρους που μπορούμε να επηρεάσουμε: το πλάτος, τη συχνότητα και τη φάση:

$$c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \phi)$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 $A_c(t)$ $f_c(t)$ $\phi(t)$

Έτσι έχουμε τρία είδη διαμόρφωσης:

AM Διαμόρφωση Πλάτους (Amplitude Modulation)

FM Διαμόρφωση Συχνότητας (Frequency Modulation)

PM Διαμόρφωση Φάσης (Phase Modulation)

Κεφάλαιο 2 Διαμόρφωση Πλάτους

2.1 AM

Έστω το φέρον:

$$c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$$

και θέλουμε να μεταφέρουμε ένα σήμα:

$m(t)$ στη βασική ζώνη

Θεωρούμε, για λόγους που θα δούμε παρακάτω, ότι το φέρον έχει συχνότητα πολύ μεγαλύτερη από το εύρος ζώνης της πληροφορίας:

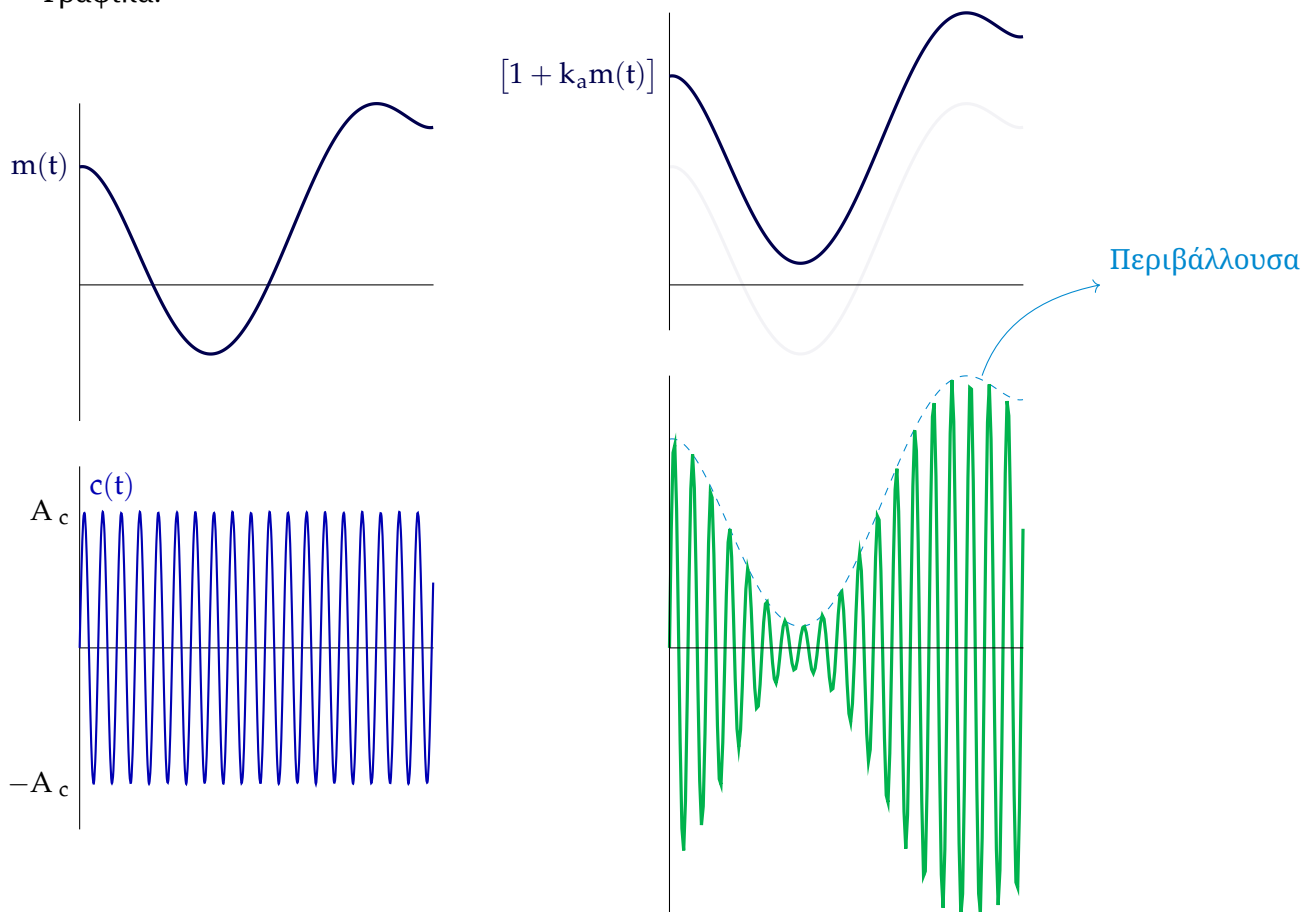
$$f_c \gg w$$

Το σήμα που εκπέμπουμε κατά AM είναι το εξής:

$$s(t) = A_c [1 + k_a \cdot m(t)] \cos(2\pi f_c t)$$

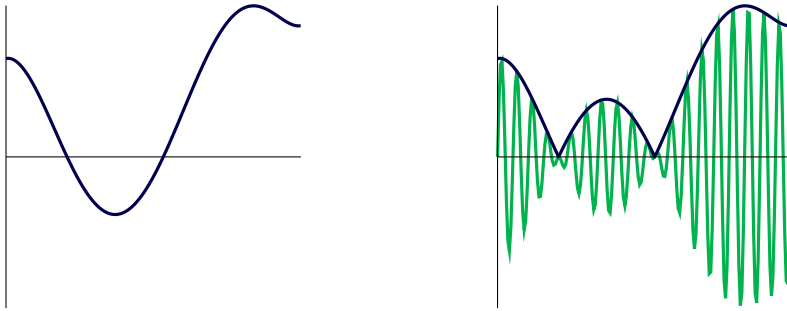
το οποίο μπορεί να εκφράζεται σε Volt ή Ampere και ίσως εκπέμπεται από κάποια κεραία.

Γραφικά:



Η περιβάλλουσα του διαμορφωμένου σήματος περιέχει την πληροφορία που θέλουμε.

Η σταθερά k_a ονομάζεται **ευαισθησία πλάτους** του διαμορφωτή, και θέλουμε να είναι τέτοια ώστε $[1 + k_a m(t)] > 0$, διότι σε διαφορετική περίπτωση:



Επειδή ο αποδιαμορφωτής βλέπει μόνο τις θετικές κορυφές του σήματος, εδώ δεν έχει μεταφέρει σωστά την πληροφορία στα σημεία όπου $[1 + k_a m(t)] < 0$, αλλά την έχει μεταφέρει ανεστραμμένη. Αυτό ονομάζεται **υπερδιαμόρφωση**.

Επομένως, θέλουμε:

$$1 + k_a m(t) \geq 0 \implies$$

$$\boxed{|k_a m(t)| \leq 1} \implies$$

$$-1 \leq k_a m(t) \leq 1$$

Παρατηρούμε ότι για να μην έχουμε υπερδιαμόρφωση, το σήμα μας δεν μπορεί να αποκτά πολύ μεγάλο πλάτος.

Ορισμός 2.1: Ποσοστό διαμόρφωσης

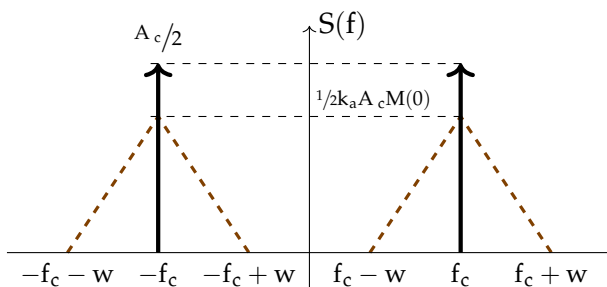
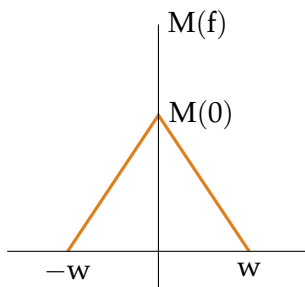
Ως ποσοστό διαμόρφωσης ορίζουμε:

$$|\max k_a m(t)| \cdot 100$$

Ξαναγράφουμε το σήμα και παίρνουμε το μετασχηματισμό Fourier:

$$s(t) = A_c \cos 2\pi f_c t + A k_a m(t) \cos 2\pi f_c t$$

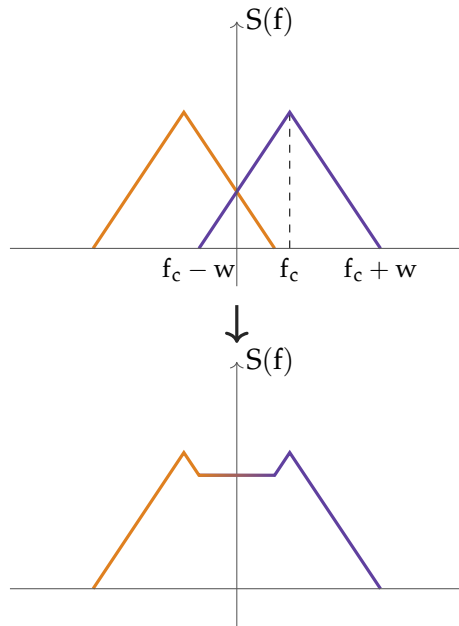
$$S(f) = \frac{A_c}{2} [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] + \frac{k_a A_c}{2} [M(f - f_c) + M(f + f_c)]$$



Βλέπουμε ότι το φάσμα του σήματος μετακινήθηκε στη συχνότητα.

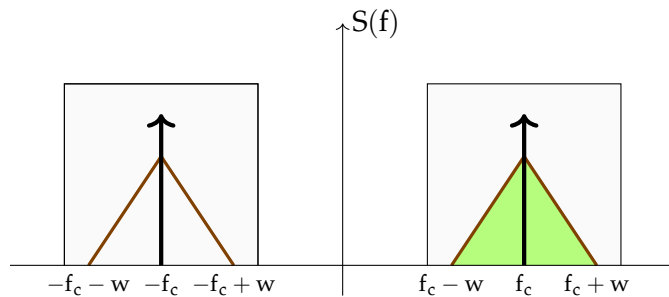
Παρατηρούμε επίσης ότι το φάσμα είναι δίπλευρο, και θυμόμαστε από το αναλογικό σήμα ότι η αρνητική συχνότητα δεν έχει φυσική σημασία, αλλά εκφράζει τον αρνητικό εκθέτη στην έκφραση του συνημιτόνου $\text{Re} \left[\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \right]$.

Αν έχουμε **μικρή συχνότητα** f_c , τότε το φάσμα του σήματος περνάει το 0:



και το αποτέλεσμα είναι παραμορφωμένο και μακριά από το επιθυμητό.

Το εύρος φάσματος του σήματος είναι $2w$ (από $f_c - w$ μέχρι $f_c + w$), το οποίο είναι περισσότερο απ' όσο χρειάζεται (αφού το αριστερό του μέρος είναι ίδιο με το δεξί), ενώ το σήμα είναι και ενεργειοβόρο, αφού τα $2/3$ της ενέργειας καταναλώνονται στον όρο δ και όχι στην πληροφορία.



2.1.1 Για ημιτονοειδή είσοδο

Έστω ένα αρχικά ημιτονοειδές σήμα:

$$m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$$

Τότε το διαμορφωμένο σήμα AM γίνεται:

$$s(t) = A_c \left[1 + \underbrace{\mu = k_a A_m}_{\mu} \cdot \cos(2\pi \cdot f_m t) \right] \cos(2\pi f_c t)$$

$$= A_c \cos(2\pi f_c t) + A_c \mu \cos(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_m t)$$

$$= A_c \cos 2\pi f_c t + \frac{1}{2} \mu A_c \cos [2\pi(f_c + f_m)t] + \frac{1}{2} \mu A_c \cos [2\pi(f_c - f_m)t]$$

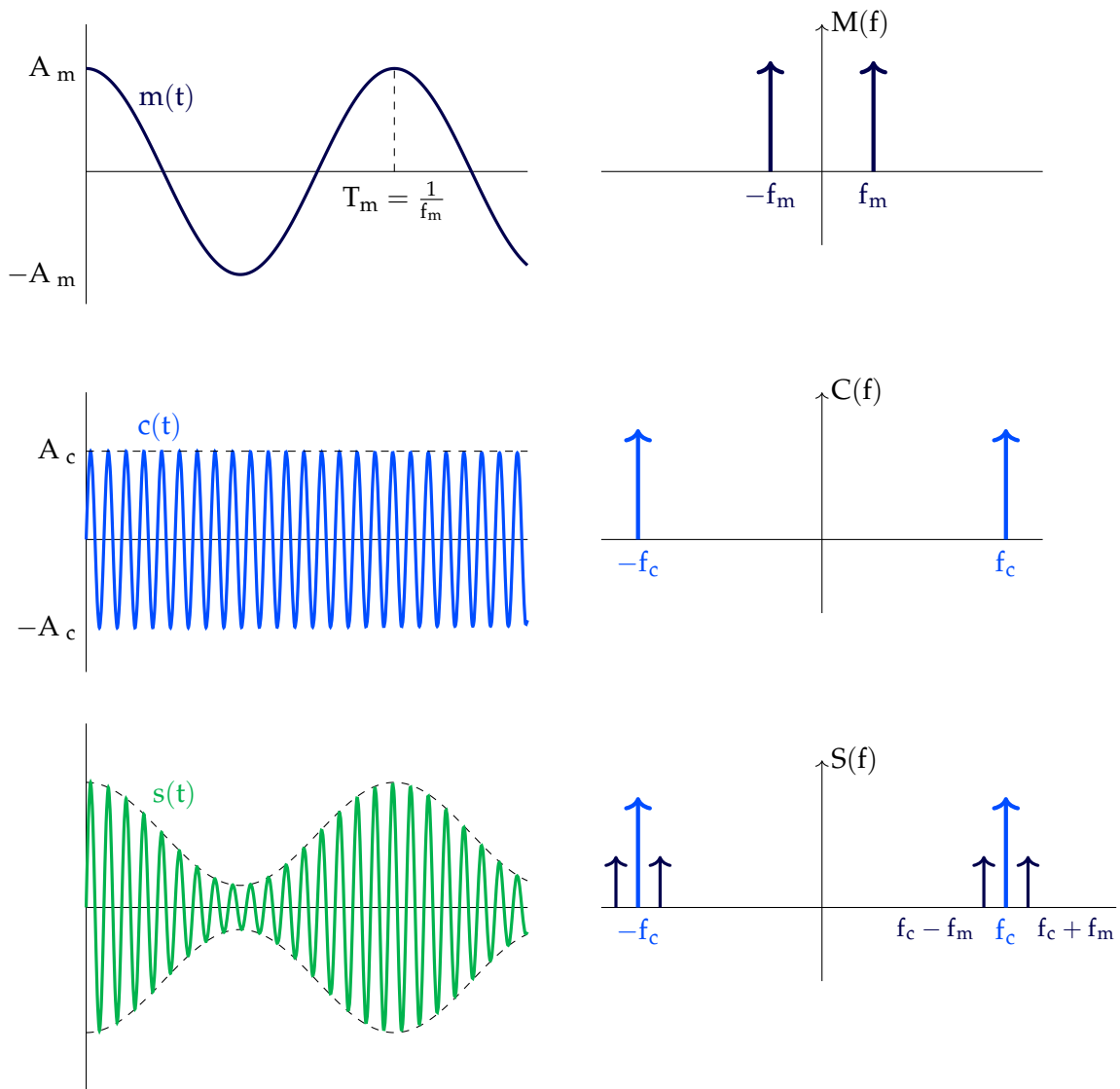
$$\mu \leq 1$$

↑ M. F

$$S(f) = \frac{1}{2} A_c [\delta(f-f_c) + \delta(f+f_c)] + \frac{1}{4} \mu A_c [\delta(f-f_c-f_m) + \delta(f-f_c+f_m)] + \frac{1}{4} \mu A_c [\delta(f+f_c+f_m) + \delta(f+f_c-f_m)]$$

όπου μ είναι ουσιαστικά το **ποσοστό διαμόρφωσης** του σήματος.

Γραφικά:



$$B_T = 2f_m = 2w$$

↓
Bandwidth

Επίσης προκύπτει ότι:

$$\frac{A_{\max}}{A_{\min}} = \frac{A_c(1 + \mu)}{A_c(1 - \mu)} \implies$$

$$\mu = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}}$$

2.1.2 Ισχύς

Αν μας ζητούνταν η ισχύς του σήματος, θα απαντούσαμε $\frac{1}{2}A_c^2R$, αν θεωρήσουμε ότι το σήμα είναι μια ένταση ρεύματος που διαρρέει κάποια αντίσταση R . Στα σήματα όμως θεωρούμε ότι η αντίσταση αυτή είναι 1, άρα παίρνουμε ίδιο αποτέλεσμα, είτε θεωρούμε ότι το σήμα αναπαριστά ρεύμα, είτε τάση.

Επομένως η ισχύς π.χ. του φέροντος είναι:

$$\boxed{\frac{1}{2}A_c^2}$$

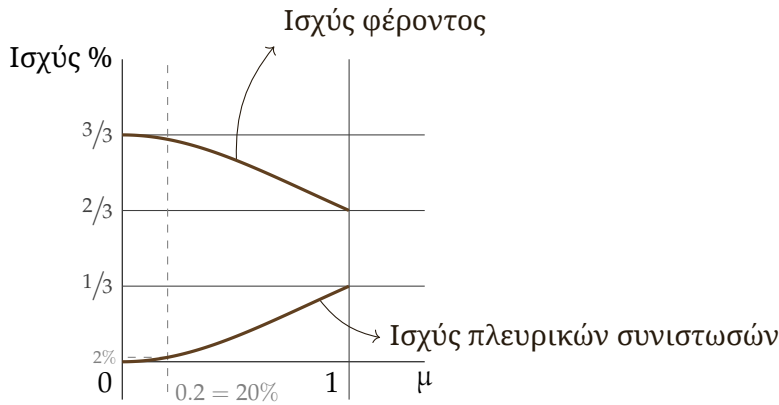
Το πλευρικό σήμα για ημιτονοειδή είσοδο έχει ενέργεια:

$$2 \times \frac{1}{8} \mu^2 A_c^2$$

και ο λόγος του με τη συνολική ενέργεια είναι:

$$\frac{2 \cdot \frac{1}{8} \mu^2 A_c^2}{\frac{1}{2} A_c^2 + 2 \cdot \frac{1}{8} \mu^2 A_c^2} = \frac{\mu^2}{2 + \mu^2}$$

Γραφικά:

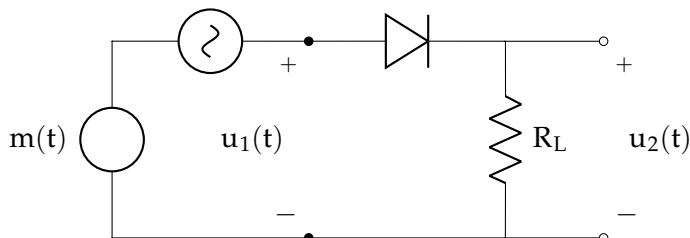


Όσο αυξάνουμε το μ , αυξάνεται το ποσοστό της ισχύος που καταναλώνεται για τη μετάδοση του σήματος και όχι του φέροντος, αλλά η ισχύς του φέροντος συνεχίζει να είναι μεγάλη.

2.1.3 Διαμορφωτής AM

Ένα ερώτημα που προκύπτει είναι ποιό κύκλωμα θα πραγματοποιήσει τον πολλαπλασιασμό του σήματος με το φέρον. Για αυτό παρουσιάζεται το παρακάτω κύκλωμα, που λειτουργεί ως **διαμορφωτής AM (διακοπτικός - switching modulator)**:

$$c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$$

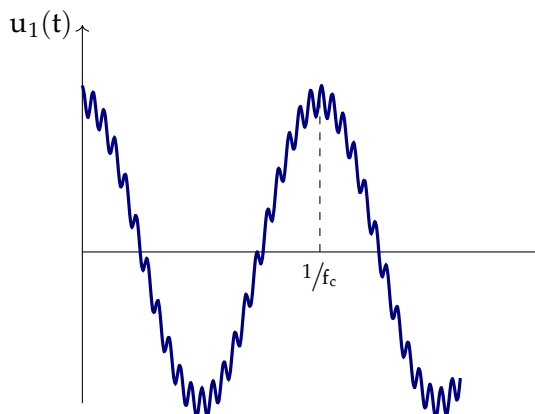


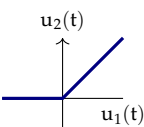
Επίσης απαιτούμε το σήμα $m(t)$ να έχει **αρκετά μικρότερο πλάτος** από το φέρον:

$$|m(t)| \ll A_c$$

Τότε, η τάση v_1 πριν τη δίοδο γίνεται:

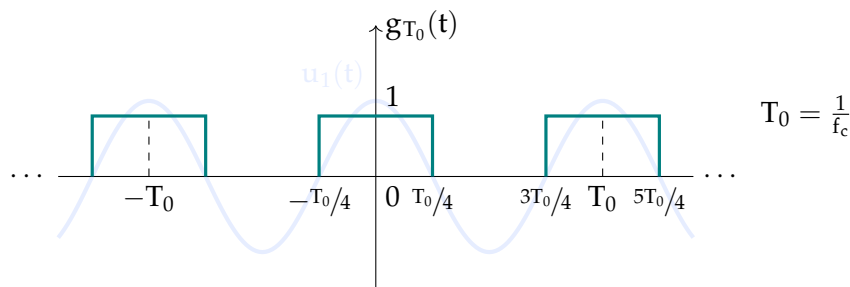
$$v_1(t) = m(t) + A_c \cos(2\pi f_c t)$$



Και, αφού θυμηθούμε την καμπύλη λειτουργίας της διόδου, , ισχύει:

$$u_2(t) \simeq \begin{cases} u_1(t), & \text{όταν } c(t) > 0 \\ 0, & \text{όταν } c(t) < 0 \end{cases}$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να εκφράσουμε την $u_2(t)$ στο χρόνο ως γινόμενο της εισόδου $u_1(t)$ και μιας συνάρτησης g_{T_0} που μηδενίζεται για $c(t) < 0$ και είναι μονάδα για $c(t) > 0$, δηλαδή μιας παλμοσειράς:



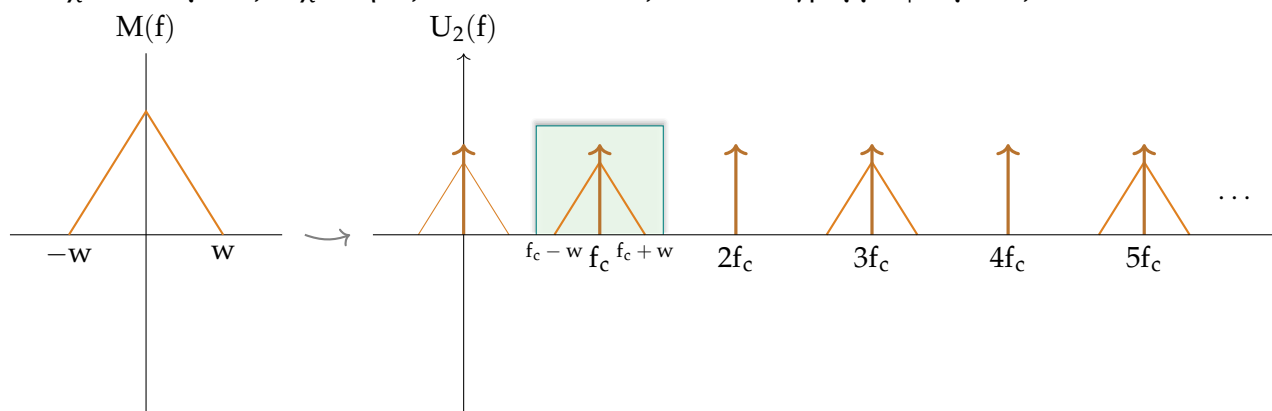
$$u_2(t) \simeq [A_c \cos 2\pi f_c t + m(t)] \cdot g_{T_0}(t)$$

$$g_{T_0}(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1} \cos[2\pi f_c t (2n-1)]$$

Άρα

$$\begin{aligned} u_2(t) &\simeq (A_c \cos 2\pi f_c t + m(t)) \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos(2\pi f_c t) - \frac{2}{\pi} \frac{1}{3} \cos(2\pi 3f_c t) + \frac{2}{\pi} \frac{1}{5} \cos(5\pi f_c t) + \dots \right] \\ &= \frac{A_c}{2} \cos 2\pi f_c t + \frac{1}{2} m(t) \\ &\quad + \frac{2}{\pi} A_c \cos 2\pi f_c t + \frac{2}{\pi} m(t) \cos 2\pi f_c t \\ &\quad - \frac{2}{3\pi} A_c \cos 2\pi(3f_c) \cos 2\pi f_c t - \frac{2}{3\pi} m(t) \cos 2\pi(3f_c t) + \dots \end{aligned}$$

Αν σχεδιάσουμε τις συχνότητες που δίνει ο τύπος σε ένα διάγραμμα φάσματος:



Παρατηρούμε ότι στο φάσμα υπάρχει το επιθυμητό διαμορφωμένο AM σήμα, όπως και ο πολυπλασιασμός του $m(t)$ με το φέρον. Επομένως, με ένα ζωνοπερατό φίλτρο, μπορούμε να πάρουμε από τις άπειρες συχνότητες μόνο το τελικό φάσμα:

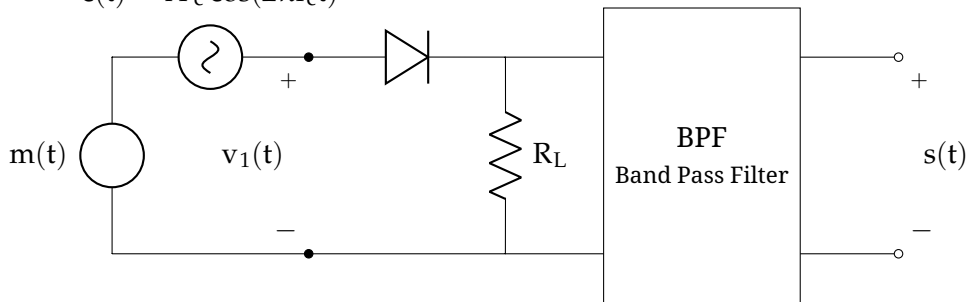
$$u(t) = \frac{A_c}{2} \left[1 + \frac{4}{\pi A_c} m(t) \right] \cos 2\pi f_c t$$

που αντιστοιχεί στον τύπο:

$$A_c [1 + k_a m(t)] \cos 2\pi f_c t$$

δηλαδή το κύκλωμα γίνεται:

$$c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$$

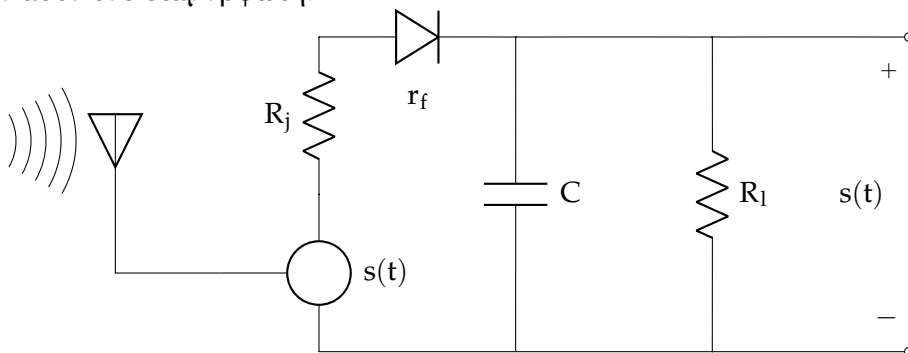


όπου το Band Pass Filter πρέπει να έχει κέντρο τη συχνότητα f_c και εύρος ζώνης από $f_c - w$ μέχρι $f_c + w$.

Αυτό ήταν ένα παράδειγμα χρήσης μη γραμμικών στοιχείων (δίοδος) για spectral spread.

2.1.4 Φωρατής περιβάλλουσας / Αποδιαμορφωτής AM

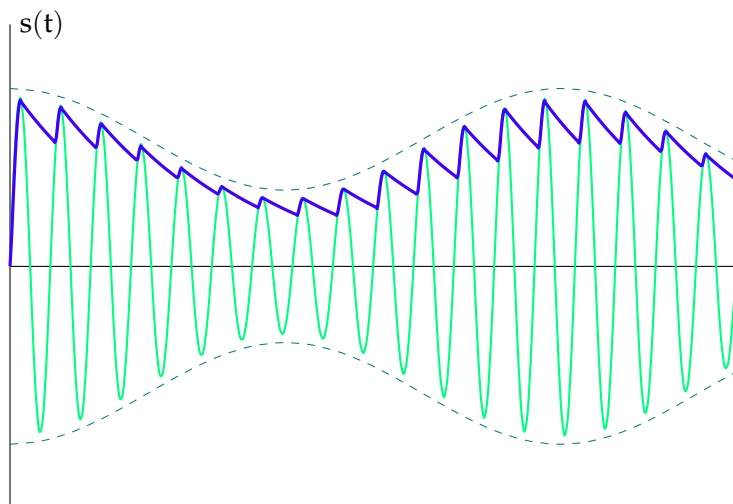
Ο φωρατής περιβάλλουσας είναι η συσκευή που μαζεύει τις κορυφές του διαμορφωμένου σήματος AM ώστε να παράγει το αρχικό σήμα (θυμόμαστε ότι $s(t) = A_c [1 + k_a m(t)] \cos(2\pi f_c t)$). Η διαδικασία ονομάζεται κορυφοφώραση, και το κύκλωμα του φωρατή δεν είναι πολύ διαφορετικό από αυτό του διαμορφωτή:



Πώς λειτουργεί αυτό το κύκλωμα;

Θυμόμαστε ότι η συχνότητα του φέροντος είναι πολύ μεγάλη σε σχέση με τη συχνότητα του αρχικού σήματος (π.χ. 100 ή παραπάνω φορές μεγαλύτερη).

Η δίοδος αφήνει να περάσει ρεύμα μόνο όταν το σήμα είναι θετικό. Όταν φτάσουμε σε μία κορυφή της διαμορφωμένης κυματομορφής, ο πυκνωτής φορτίζεται άμεσα, και ξεφορτίζεται πολύ αργά με μία εκθετική καμπύλη, μέχρι να φτάσει στην επόμενη κορυφή:



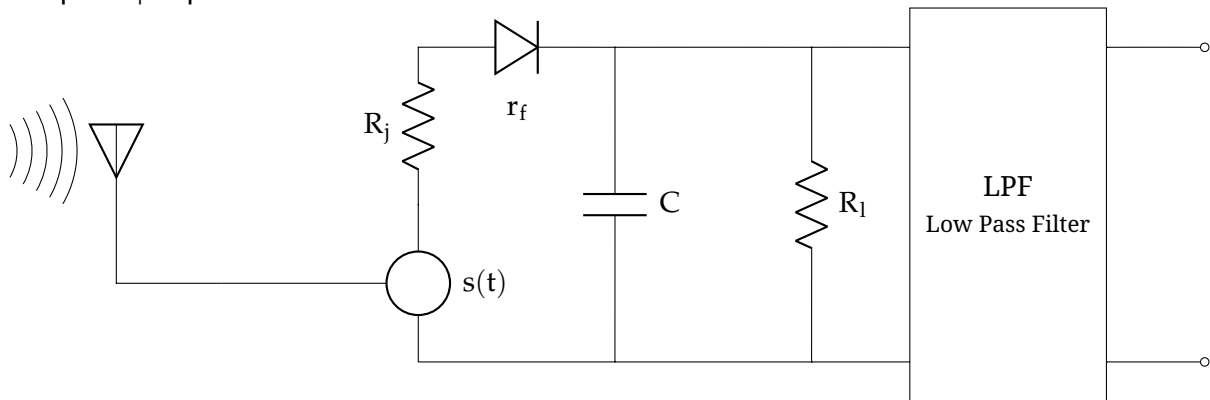
Πρακτικά το κύκλωμα χωρίζεται σε δύο κομμάτια. Το αριστερό που περιλαμβάνει τη δίοδο έχει μικρή σταθερά χρόνου και επηρεάζεται άμεσα από τις κορυφές. Το δεξί έχει μεγάλη σταθερά χρόνου ώστε να διατηρείται η χαμηλής συχνότητας έξοδος. Ο πυκνωτής που βρίσκεται στη μέση ανήκει και στα δύο τμήματα. Πρακτικά:

$$(R_s + r_f)C \ll \frac{1}{f_c}$$

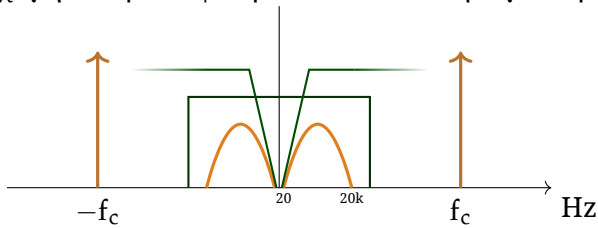
και

$$\frac{1}{f_c} \ll R_1 C \ll \frac{1}{w}$$

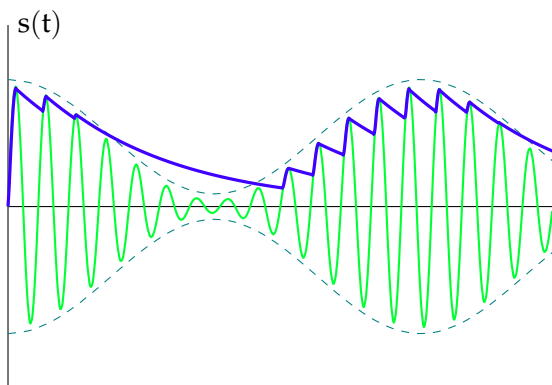
Για να μην υπάρχουν οι συχνότητες που προκύπτουν από την εκθετική πτώση της τάσης του πυκνωτή ανάμεσα στις κορυφές, μπορούμε να τοποθετήσουμε στο τέλος του κυκλώματος ένα χαμηλοπερατό φίλτρο.



Επίσης, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα φίλτρο που κόβει τον DC όρο, ώστε από την τιμή $1 + k_{am}(t)$ του αρχικού σήματος να καταλήξουμε στην επιθυμητή $k_{am}(t)$. Για παράδειγμα, σε μια κυματομορφή που παριστάνει ήχο, μπορούμε να κόψουμε τις συχνότητες κάτω από 20 Hz, μαζί με το χαμηλοπερατό φίλτρο που τοποθετήσαμε παραπάνω:

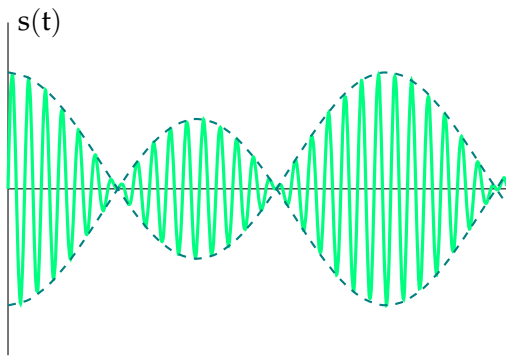


Πρόβλημα 1: Αργός πυκνωτής Αν ο πυκνωτής είναι πολύ αργός, μπορεί να μην προλάβει να έχει κατέβει αρκετά μέχρι την επόμενη κορυφή, και έτσι να χαθεί κάποια πληροφορία του σήματος:



Αυτό μπορεί να διορθωθεί βλέποντας ποιά είναι η μέγιστη ταχύτητα μεταβολή του σήματος, και ρυθμίζοντας ανάλογα τις σταθερές της διαμόρφωσης και του αποδιαμορφωτή, ώστε να μην υπάρχει περίπτωση κάποια κορυφή του AM να είναι κάτω από την τάση του πυκνωτή κάθε στιγμή.

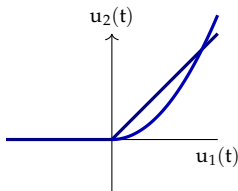
Πρόβλημα 2: Υπερδιαμόρφωση Αν το αρχικό σήμα έχει πολύ μεγάλο πλάτος, δηλαδή αν $|k_a m(t)| > 1$, τότε η αποδιαμόρφωση δεν θα δώσει το επιθυμητό αποτέλεσμα, όπως είχαμε αναφέρει και παραπάνω:



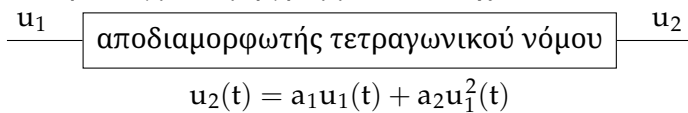
Αυτό μπορεί να διορθωθεί με διαφορετική επιλογή της σταθεράς k_a , έτσι ώστε $1 + k_a m(t) \geq 0$.

2.1.5 Και άλλοι αποδιαμορφωτές

Ο παραπάνω αποδιαμορφωτής, όπως και ο διαμορφωτής, λειτουργεί με χρήση ενός μη γραμμικού στοιχείου, της διόδου.



Η συμπεριφορά της διόδου μπορεί να προσεγγιστεί με μια σχέση της μορφής $y = ax^2 + b$. Οπότε, ας εξετάσουμε ένα σύστημα που εξάγει το τετράγωνο μιας κυματομορφής, που είναι ένα από τα πιο απλά παραδείγματα μη γραμμικών στοιχείων:

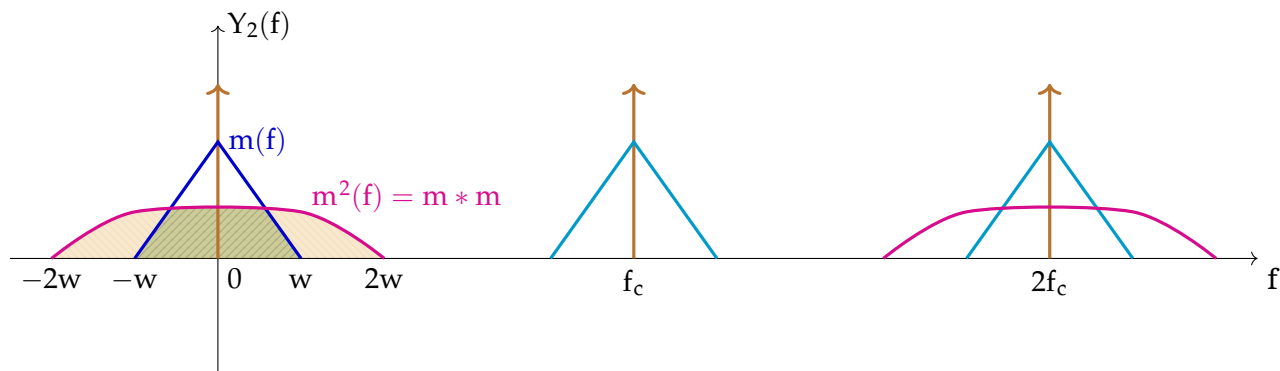


Γενικά, τέτοια μη γραμμικά συστήματα παράγουν πολλές συχνότητες, και μία από αυτές ίσως είναι αυτή που επιθυμούμε.

Θα πραγματοποιήσουμε μια ανάλυση παρόμοια με τον διαμορφωτή, μελετώντας την έξοδο του παραπάνω συστήματος στο πεδίο συχνότητας:

$$\begin{aligned}
 u_1(t) &= s(t) = A_c [1 + k_a m(t)] \cos(2\pi f_c t) \\
 u_2(t) &= a_1 A_c [1 + k_a m(t)] \cos 2\pi f_c t + a_2 A_c^2 [1 + k_a m(t)]^2 \cos^2 2\pi f_c t \\
 &= a_1 A_c \cos 2\pi f_c t \\
 &\quad + a_1 A_c k_a m(t) \cos 2\pi f_c t \\
 &\quad + a_2 \frac{A_c^2}{2} \\
 &\quad + 2a_2 \frac{A_c^2}{2} k_a m(t) \\
 &\quad + a_2 \frac{A_c^2}{2} k_a^2 m^2(t) \\
 &\quad + a_2 \frac{A_c^2}{2} \cos 2\pi 2f_c t \\
 &\quad + a_2 \frac{A_c^2}{2} k_a m(t) \cos 2\pi 2f_c t \\
 &\quad + a_2 \frac{A_c^2}{2} k_a^2 m^2(t) \cos 2\pi 2f_c t
 \end{aligned}$$

Από μία ύψωση στο τετράγωνο δηλαδή προκύπτουν πολλές καινούριες συχνότητες:



Φαίνεται, όπως είδαμε και στο προηγούμενο κύκλωμα, ο DC όρος στο $f = 0$, τα ripples στις υψηλότερες συχνότητες, αλλά και μία παραμόρφωση που οφείλεται στον όρο $m^2(t)$, η οποία, αφού προκύπτει από συνέλιξη του $m(t)$ (εύρος ζώνης w) με τον εαυτό του, έχει εύρος ζώνης:

$$a_2 \frac{A_c^2}{2} k_a^2 m^2(t)$$

Για να μειωθεί η παραμόρφωση αυτή, πρέπει να μειώσουμε τον όρο $k_a^2 m^2(t)$, ή ισοδύναμα τον $k_a m(t)$:

$$k_a^2 m^2(t) \ll k_a m(t) \ll 1$$

2.2 DSB-SC

2.2.1 Στο δρόμο για την κατανάλωση λιγότερης ισχύος

Θυμόμαστε το σήμα:

$$\begin{aligned} s(t) &= A_c [1 + k_a m(t)] \cos 2\pi f_c t \\ &= \underbrace{A_c \cos 2\pi f_c t}_{\text{carrier}} + A_c k_a m(t) \cos 2\pi f_c t \end{aligned}$$

Τι γίνεται αν αφαιρέσουμε τον όρο $A_c \cos 2\pi f_c t$, ο οποίος δεν περιέχει πληροφορία, αλλά καταναλώνει μόνο παραπάνω ισχύ (θυμόμαστε ότι ο όρος αυτός υπάρχει για την αποδιαμόρφωση);

Τότε θα πάρουμε ένα άλλο σήμα:

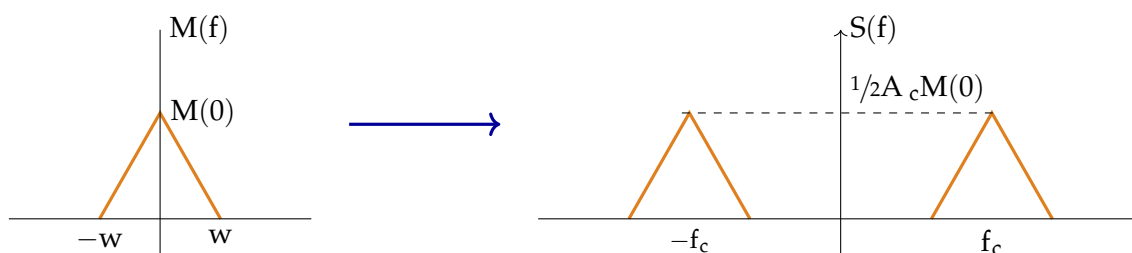
$$s(t) = A_c m(t) \cos 2\pi f_c t$$

το οποίο ονομάζουμε διαμορφωμένο κατά **DSB-SC** (Double Side Band - Supressed Carrier).

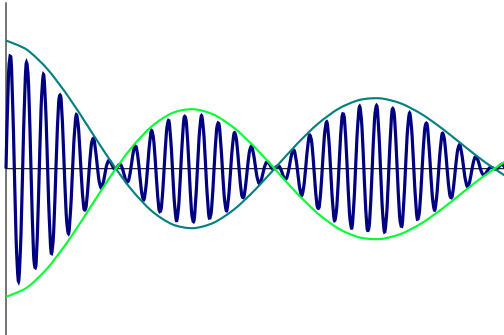
Μετασχηματισμένο κατά Fourier:

$$S(f) = \frac{1}{2} A_c [M(f - f_c) + M(f + f_c)]$$

Δηλαδή το σήμα εξόδου αποτελείται από το αρχικό σήμα, μετατοπισμένο μόνο κατά τη συχνότητα:



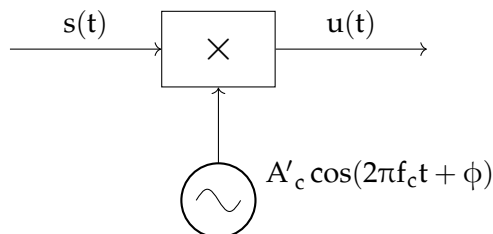
Στο πεδίο του χρόνου, το σήμα φαίνεται κάπως έτσι:



Παρατηρούμε την αρχική κυματομορφή, η οποία αποκτά και αρνητικές τιμές, με αποτέλεσμα η χρήση του αποδιαμορφωτή AM που χρησιμοποιήσαμε και προηγουμένως να μην είναι εφικτή. Στην πραγματικότητα, ο σχεδιασμός ενός αποδιαμορφωτή AM είναι πιο δύσκολος.

2.2.2 Αποδιαμορφωτής

Σχεδιάζουμε το κύκλωμα του αποδιαμορφωτή ως έναν πολλαπλασιαστή του φέροντος με το διαμορφωμένο σήμα, φροντίζοντας να μην ξεχάσουμε το δικό μας φέρον να έχει την κατάλληλη φάση ϕ που να αντιστοιχεί στη φάση του φέροντος του λαμβανόμενου σήματος:



Τότε, με λίγα μαθηματικά έχουμε:

$$\begin{aligned} u(t) &= s(t) \cdot c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \phi) A_c m(t) \cos(2\pi f_c t) \\ &= \frac{1}{2} A_c A'_c m(t) \cos(2\pi 2f_c t + \phi) + \frac{1}{2} A_c A'_c m(t) \cos \phi \end{aligned}$$

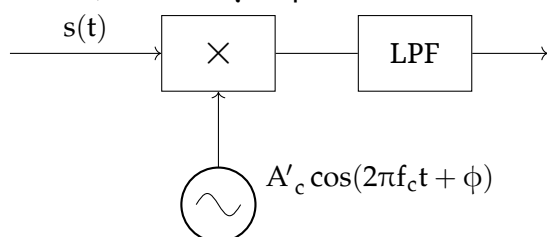
Και, εφαρμόζοντας ένα φίλτρο LPF που κόβει τις υψηλές συχνότητες $2\pi 2f_c$:

$$u(t)|_{\text{LPF}} = \frac{1}{2} A_c A'_c m(t) \cos \phi$$

Στο τελικό αποτέλεσμα έχουμε το επιθυμητό $m(t)$, και έναν όρο $\cos \phi$. Όταν η γωνία ϕ (που εκφράζει τη διαφορά φάσης μεταξύ του φέροντος του δέκτη και του πομπού) είναι 0, τότε $\cos \phi = 1$, και το σήμα έχει πλήρες πλάτος. Όταν έχουμε $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$ όμως, ο διαμορφωτής και ο αποδιαμορφωτής δεν είναι συγχρονισμένοι, και δεν παίρνουμε καθόλου σήμα.

Ο λόγος που ήταν δύσκολο να υλοποιηθούν τέτοια κυκλώματα ήταν η έλλειψη φθηνών κυκλωμάτων συγχρονισμού τα οποία μπορούν να παρακολουθήσουν τη φάση ϕ . Η φάση του φέροντος μπορεί να επηρεαστεί από εμπόδια που υπάρχουν στη διαδρομή του κύματος, κάτι που οδηγούσε και στα φαινόμενα των *διαλείψεων* στα παλιότερα ραδιόφωνα. Για συγχρονισμό της φάσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα σύστημα αυτομάτου ελέγχου PLL (Phase-Locked Loop).

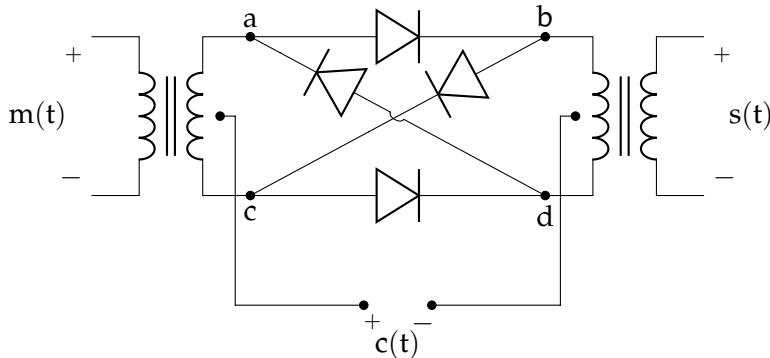
Τελικά, το κύκλωμα προκύπτει:



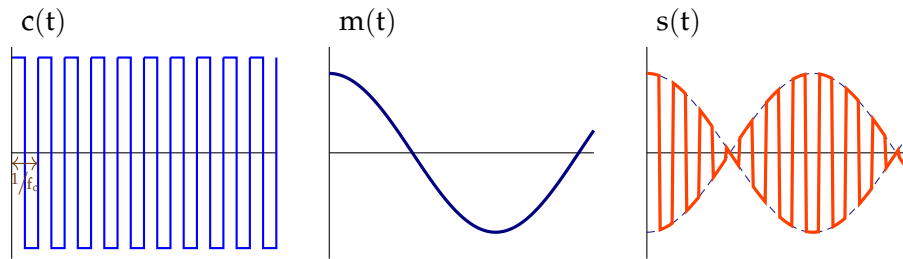
2.2.3 Δακτυλιοειδής διαμορφωτής (ring modulator)

Προκύπτει το ερώτημα πώς μπορούμε να υλοποιήσουμε κυκλωματικά έναν πολλαπλασιαστή. Έστω λοιπόν ότι θέλουμε να πολλαπλασιάσουμε ένα σήμα $m(t)$ με ένα φέρον $A_c \cos 2\pi f_c t$.

Για αυτόν τον λόγο υπάρχει ένα κύκλωμα που ονομάζεται **δακτυλιοειδής διαμορφωτής (ring modulator)**, με είσοδο το $m(t)$ και μια τετραγωνική κυματομορφή $c(t)$ συχνότητας f_c :



Αυτό το κύκλωμα ουσιαστικά εναλλάσσει την αλλαγή ή όχι του προσήμου της κυματομορφής εισόδου:



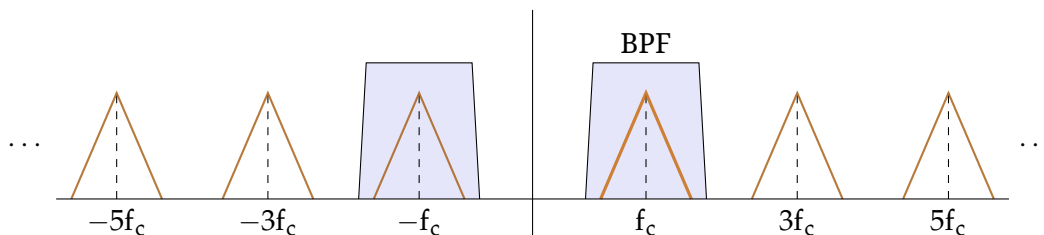
Πρακτικά, πολλαπλασιάζει το $c(t)$ με το $m(t)$. Μαθηματικά, παίρνουμε τη σειρά Fourier του c και βλέπουμε:

$$c(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cos [2\pi f_c (2n-1)t] \implies$$

$$m(t)c(t) = \frac{4}{\pi} m(t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cos [2\pi f_c (2n-1)t]$$

Ακριβώς όπως μελετήσαμε τον διαμορφωτή και τον αποδιαμορφωτή AM, ίσως μέσα στις συχνότητες της παραπάνω συνάρτησης υπάρχει και το σήμα που θέλουμε:

$n = 1$	$m(t) \frac{4}{\pi} \cos 2\pi f_c t$	\leftarrow το επιθυμητό σήμα
$n = 2$	$m(t) \frac{4}{\pi} \cos 2\pi 3f_c t$	
$n = 3$	$m(t) \frac{4}{\pi} \cos 2\pi 5f_c t$	

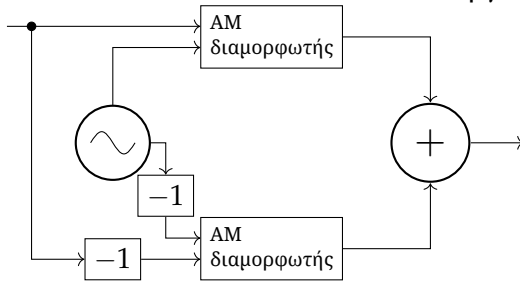


Επομένως, παίρνουμε ένα band pass φίλτρο μόνο για τις συχνότητες του $n = 1$ και προκύπτει η ζητούμενη έξοδος $m(t) \frac{4}{\pi} \cos 2\pi f_c t$.

Τέτοιου είδους κυκλώματα, σε συνδυασμό με το Band Pass Filter, είναι διαθέσιμα στο εμπόριο και ονομάζονται **μίκτες (mixers)**.

Να σημειωθεί βέβαια πως για να λειτουργήσει σωστά αυτή η διάταξη, πρέπει το κύκλωμα και τα χαρακτηριστικά των στοιχείων του (δίοδοι, μετασχηματιστές) να είναι συμμετρικά.

Εναλλακτικά, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για το ίδιο αποτέλεσμα ένα κύκλωμα που ονομάζεται *double-balanced modulator* και λειτουργεί με δύο όμοιους διαμορφωτές AM:



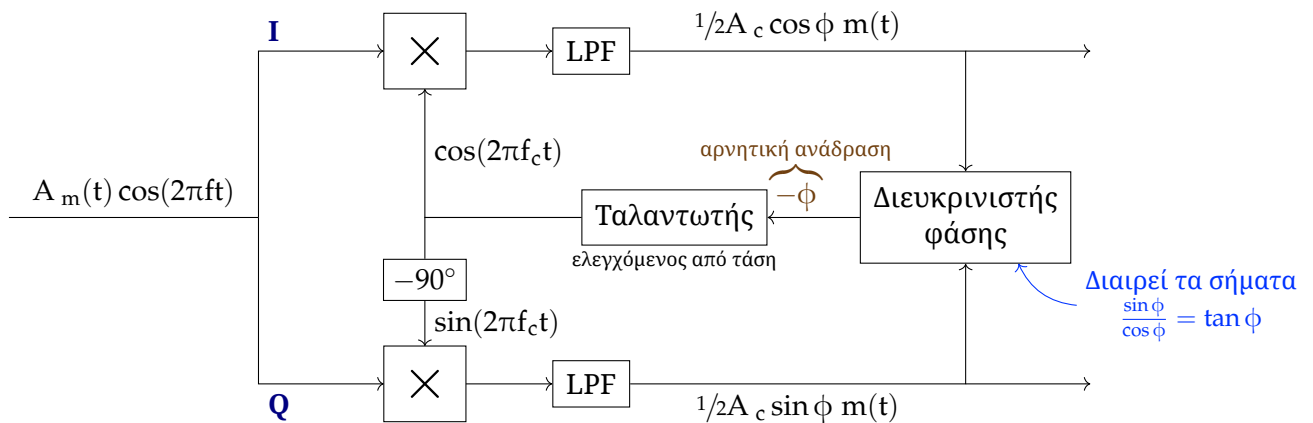
2.2.4 Δέκτης Costas

Θυμόμαστε ότι για ένα σήμα:

$$s(t) = A_c m(t) \cdot \cos(2\pi f_c t + \phi)$$

μπορούμε εύκολα να βρούμε τον όρο $A'_c \cos(2\pi f_c t)$, αλλά όχι τον όρο $A'_c \cos(2\pi f_c t + \phi)$ (εκτός ίσως αν τον επανεκπέμψουμε μόνο του από την πλευρά του πομπού με διαφορετική, π.χ διπλάσια συχνότητα, κάτι που δεν εφαρμόζεται επειδή καταναλώνονται κι άλλες συχνότητες).

Σχεδιάζουμε έναν νέο δέκτη, ο οποίος αποτελείται από δύο απλούς αποδιαμορφωτές της ενότητας 2.2.2:



Ο δέκτης αυτός ονομάζεται **δέκτης Costas**, και αποτελείται από έναν ταλαντωτή $\cos(2\pi f_c t + \phi)$, και δύο κλάδους αποδιαμορφωτών, από τους οποίους ο ένας πολλαπλασιάζεται με φέρον φάσης ϕ , και ο δεύτερος με φέρον φάσης $\phi - 90^\circ$. Στη συνέχεια, τα δύο σήματα διαιρούνται ώστε να βρούμε τη γωνία $\phi \approx \tan \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{1/2 A_c \sin \phi m(t)}{1/2 A_c \cos \phi m(t)}$. Η γωνία αυτή πηγαίνει ως είσοδος στον ταλαντωτή, έτσι ώστε να διορθωθεί η φάση του σήματος που δίνει ως έξοδο μέσω μιας διαδικασίας αρνητικής ανάδρασης.

2.2.5 Ισχύς

Έστω ένα σήμα διαμορφωμένο κατά DSB-SC:

$$u(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t)$$

Για την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του σήματος ισχύει:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_u(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t)u(t-\tau) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A_c^2 m(t)m(t-\tau) \cos(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_c(t-\tau)) dt \\ &= \frac{A_c^2}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} m(t)m(t-\tau) [\cos(4\pi f_c t - 2\pi f_c \tau) + \cos(2\pi f_c \tau)] dt \end{aligned}$$

Θα αναλύσουμε ξεχωριστά τον όρο $\int_{-\infty}^{\infty} m(t)m(t-\tau) \cos(4\pi f_c t - 2\pi f_c \tau) dt$. Από το θεώρημα του Parseval ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f) df$$

άρα έχουμε:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} m(t)m(t-\tau) \cos(4\pi f_c t - 2\pi f_c \tau) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F[m(t-\tau)] \left\{ F[m(t) \cos(4\pi f_c t - 2\pi f_c \tau)] \right\}^* dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f_c t} M(f) \left[-\frac{M(f-2f_c)e^{-j2\pi f_c t}}{2} + \frac{M(f+2f_c)e^{-j2\pi f_c t}}{2} \right]^* dt \end{aligned}$$

Επειδή θεωρούμε το f_c πολύ μεγάλο, δεν υπάρχει περίπτωση ο πολλαπλασιασμός των δύο παραπάνω όρων να δώσει τιμή διαφορετική του 0 (αφού τα φάσματα βρίσκονται σε διαφορετικό σημείο

άρα το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι 0).

Επομένως:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_u(\tau) &= \frac{A_c^2}{2} \cos 2\pi f_c \tau \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} m(t)m(t-\tau) dt \\ &= \frac{A_c^2}{2} \mathcal{R}_m(\tau) \cos 2\pi f_c \tau \end{aligned}$$

Άρα για την **ισχύ** του σήματος ισχύει:

$$P_u = \mathcal{R}_u(0) = \frac{A_c^2}{2} \mathcal{R}_m(0) = \frac{1}{2} A_c^2 P_m$$

όπου P_m η ισχύς του $m(t)$.

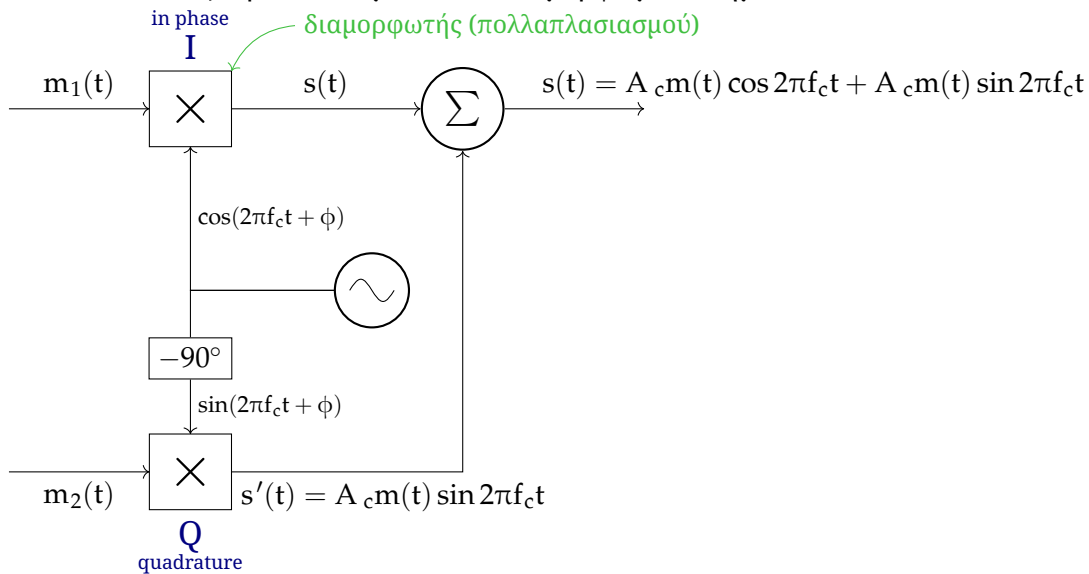
Εναλλακτικά, θυμόμαστε τον ορισμό της ισχύος:

$$\begin{aligned} P_u &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A_c^2 m^2(t) \cos^2 2\pi f_c t dt \\ &= \frac{A_c^2}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} m^2(t) dt + \frac{A_c^2}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} m^2(t) \cos(2\pi 2f_c t) dt \\ &= \frac{A_c^2}{2} P_m \end{aligned}$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα ήταν 0, αφού ήταν ολοκλήρωμα στο άπειρο με μία συμμετρική συνάρτηση (cos) πολλαπλασιασμένη με μια πολύ αργή (άρα πρακτικά σταθερή).

2.3 QAM

Έστω ότι έχουμε δύο σήματα, $m_1(t)$ και $m_2(t)$, καθώς και το γνωστό φέρον $c(t) = A_c \cos 2\pi f_c t$. Διαμορφώνουμε τα σήματα κατά **DSB-SC**, όπως παρουσιάσαμε στην προηγούμενη ενότητα. Το ένα το διαμορφώνουμε με φέρον $A_c \cos 2\pi f_c t$, και το άλλο με φέρον $A_c \sin 2\pi f_c t$, δηλαδή φάση μικρότερη κατά 90° . Στο τέλος, προσθέτουμε τα δύο διαμορφωμένα σήματα:



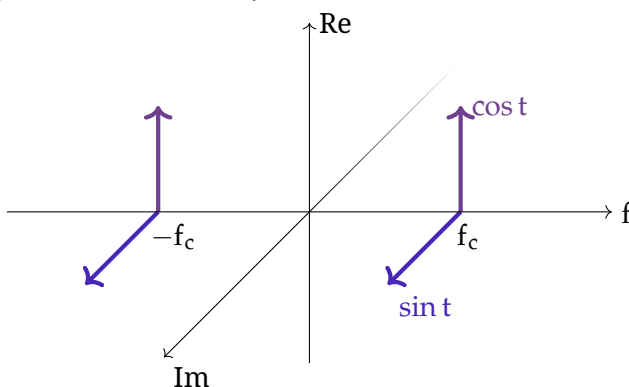
Δηλαδή η έξοδος είναι:

$$s(t) = A_c m(t) \cos 2\pi f_c t + A_c m(t) \sin 2\pi f_c t$$

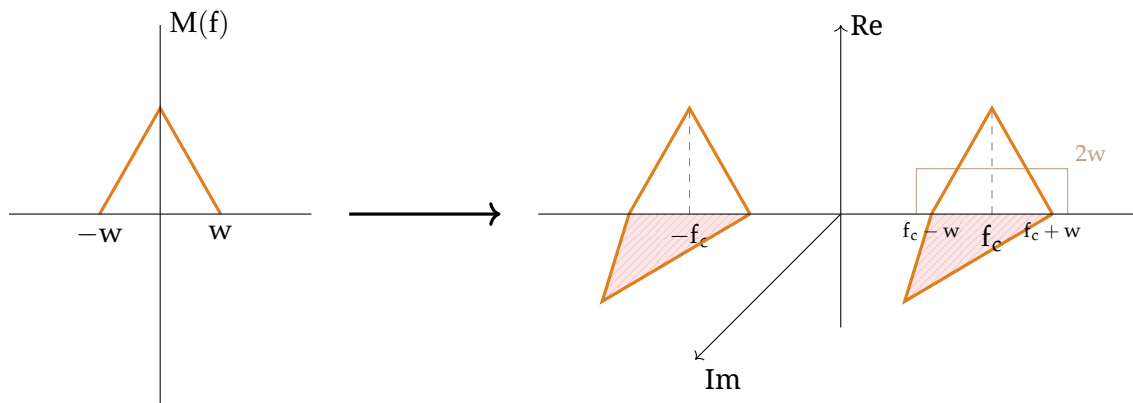
Για να τη μελετήσουμε στο πεδίο της συχνότητας, πρώτα θυμόμαστε τους Μ/Σ Fourier των \cos και \sin :

$$\begin{aligned} \cos 2\pi f_c t &\leftrightarrow \frac{1}{2}\delta(f - f_c) + \frac{1}{2}\delta(f + f_c) \\ \sin 2\pi f_c t &\leftrightarrow -\frac{1}{2}j\delta(f - f_c) + \frac{1}{2}j\delta(f + f_c) \end{aligned}$$

Δηλαδή το πεδίο της συχνότητας περιέχει τιμές στο μιγαδικό επίπεδο, οι οποίες μπορούν να παρουσιαστούν ως εξής:

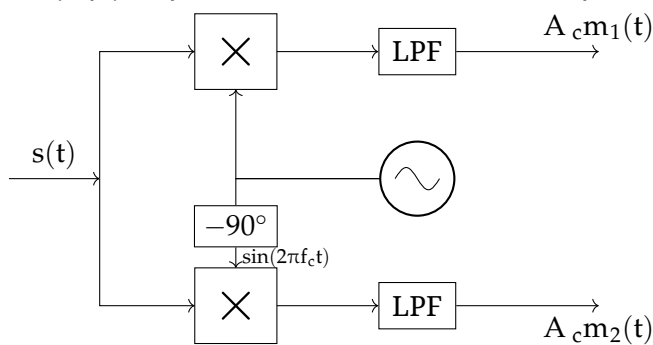


Άρα το σήμα έχει μορφή:



Να σημειωθεί πως το γεγονός ότι υπάρχουν και τιμές στον φανταστικό άξονα, δεν σημαίνει ότι το σήμα δεν υφίσταται στην πραγματικότητα, αλλά ότι περιέχει και δεδομένα στην φάση του!

Η διαδικασία της αποδιαμόρφωσης μπορεί να μας επιστρέψει και τα δύο σήματα, όπως και στον αποδιαμορφωτή DSB-SC, πολλαπλασιάζοντας την είσοδο αρχικά με $\cos 2\pi f_c t$, και μετά με $\sin 2\pi f_c t$:



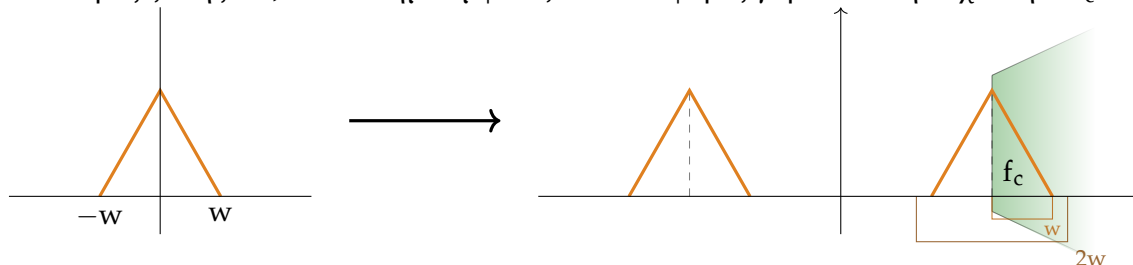
Οπότε, π.χ η πρώτη έξοδος είναι:

$$s(t) \cos 2\pi f_c t = 2A_c m_1(t) \cos^2 2\pi f_c t + 2A_c m_2(t) \cos 2\pi f_c t \sin 2\pi f_c t = A_c m_1(t)$$

Αυτή η τεχνική εκμεταλλεύεται την ορθογωνικότητα του ημιτόνου και του συνημιτόνου ώστε να μεταδώσει διπλάσιο σήμα στο ίδιο εύρος ζώνης. Είναι μία τεχνική **πολυπλεξίας**, και ονομάζεται **QAM (Quadrature Amplitude Modulation - Διαμόρφωση ορθογωνικών φερόντων)**. Δεν χρησιμοποιούνται σε εμπορικές εφαρμογές λόγω του κόστους των πολλών διαμορφωτών και του κυκλώματος συγχρονισμού.

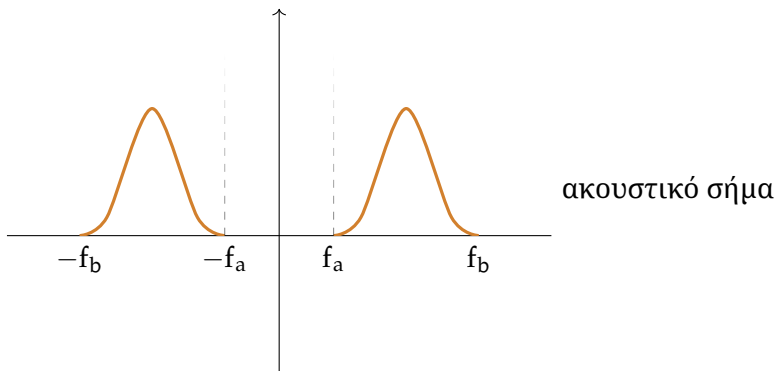
2.4 SSB

Αφού τα αρχικά σήματα που χρησιμοποιούμε έχουν δίπλευρο φάσμα, όταν διαμορφωθούν, ξοδεύουν εύρος ζώνης $2w$, και το σήμα εμφανίζεται δύο φορές γύρω από τη συχνότητα f_c .

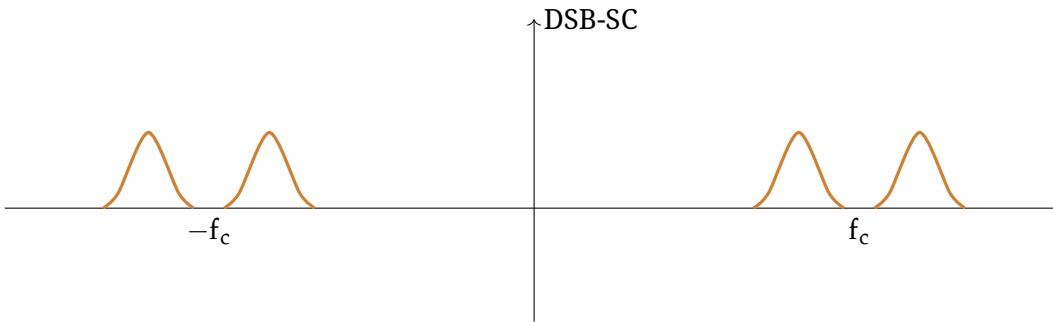


Αν μπορούσαμε να "κόψουμε" το ένα (π.χ. το αριστερό) κομμάτι του διαμορφωμένου σήματος, θα είχαμε την ίδια πληροφορία, αλλά θα καταναλώναμε μισό εύρος ζώνης. Για αυτό παρουσιάζουμε παρακάτω τη διαμόρφωση **SSB (Single Side Band)**.

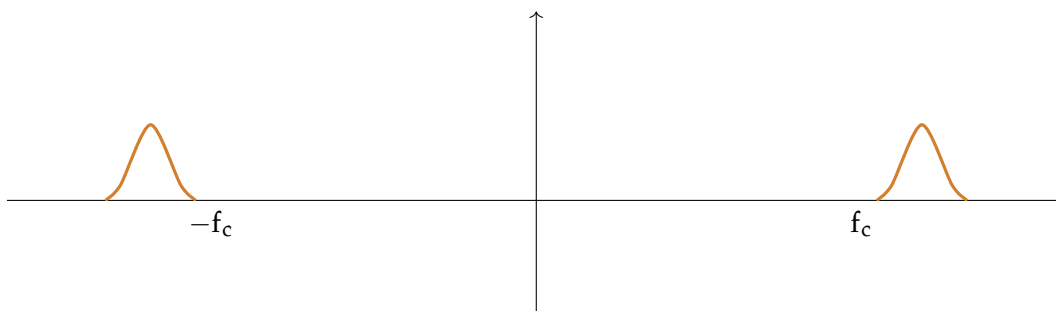
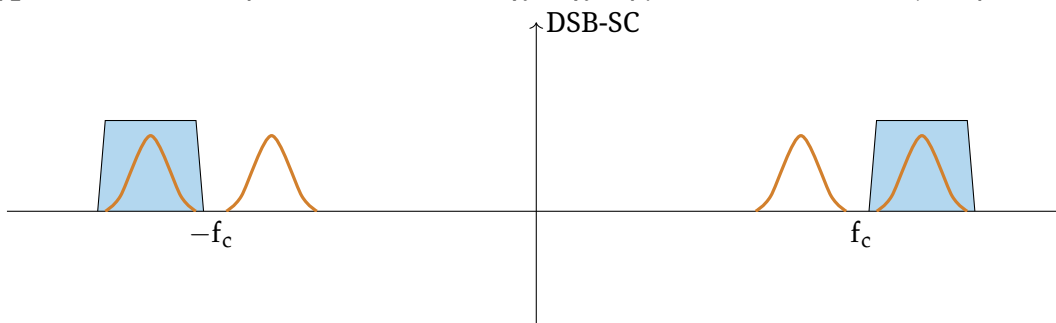
Η διαμόρφωση αυτή λειτουργεί καλύτερα σε ακουστικά και όχι οπτικά/σήματα δεδομένων, επειδή τα ακουστικά σήματα ξεκινούν από συχνότητες 20-600 Hz, και δεν έχουν DC κομμάτι:



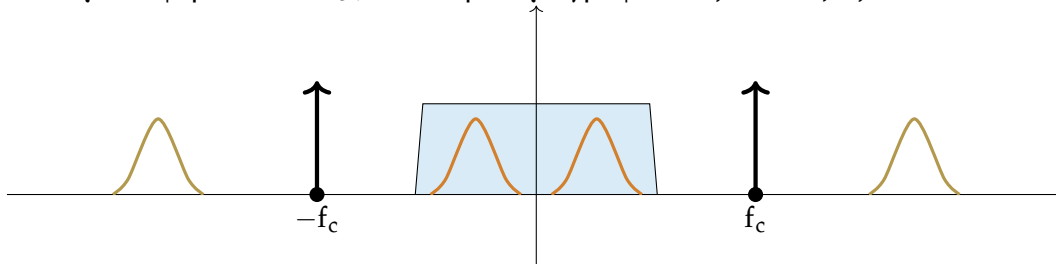
Αρχικά, διαμορφώνουμε το σήμα κατά τα γνωστά, με DSB-SC:



και χρησιμοποιούμε ένα Band Pass φίλτρο για να πάρουμε μόνο το δεξί μέρος του διαμορφωμένου φάσματος. Το γεγονός ότι χρησιμοποιούμε το δεξί κομμάτι οφείλεται στην ονομασία **USB (Upper Side Band)** της διαδικασίας (δεν έχει σχέση με το USB του υπολογιστή!):

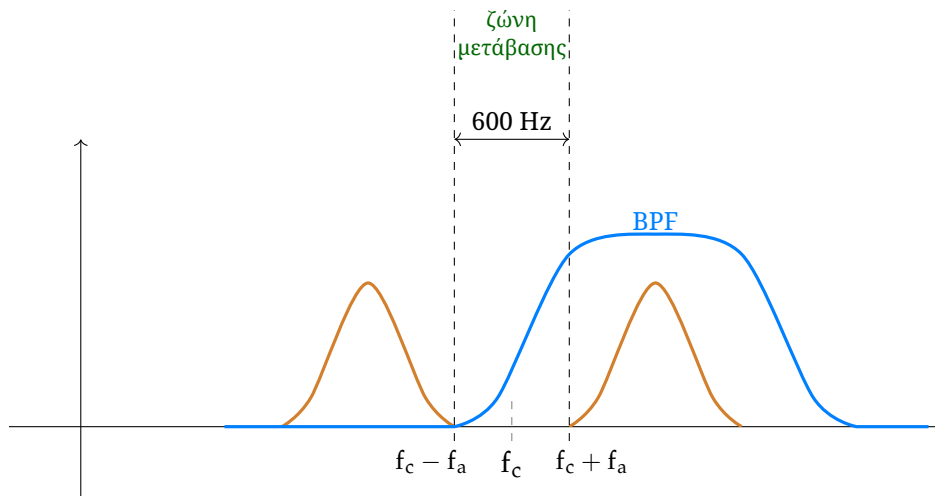


Έτσι πήραμε το τελικό διαμορφωμένο σήμα. Για την αποδιαμόρφωση, πολλαπλασιάζουμε ως γνωστόν με το φέρον $\cos 2\pi f_c t$, και παίρνουμε γραφικά τις συνελίξεις:



που με ένα απλό Low Pass Filter μάζ δίνουν το αρχικό ακουστικό σήμα.

Αν και παραστήσαμε αυτές τις αλλαγές στο πεδίο της συχνότητας, τώρα πρέπει να τις υλοποιήσουμε. Η δυσκολία της υλοποίησης έγκειται στο ότι το φίλτρο που αποκόπτει το επάνω μέρος πρέπει να έχει πολύ μικρή ζώνη μετάβασης. Αν μελετήσουμε την τυπική απόκριση συχνότητας ενός band pass filter:

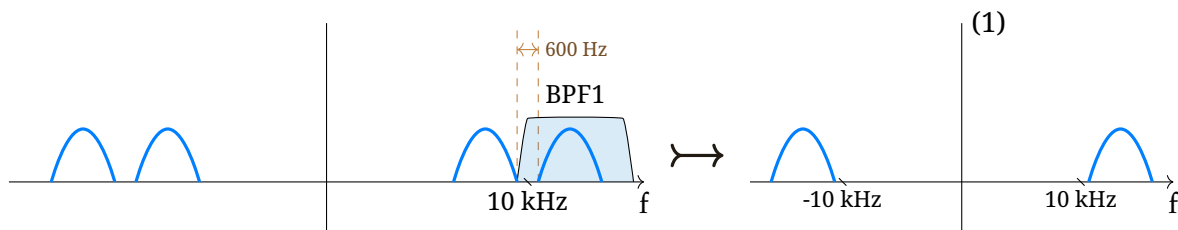


Βλέπουμε ότι η ζώνη μετάβασης είναι αρκετά στενή, και η υλοποίηση ενός τέτοιου φίλτρου γίνεται όλο και δυσκολότερη όσο αυξάνεται η συχνότητα f_c . Να σημειωθεί ότι το πλάτος της ζώνης μετάβασης χαρακτηρίζεται από τη σχέση $\frac{2f_a}{f_c}$, η οποία έχει τιμή 5% για απλά αναλογικά κυκλωματικά φίλτρα.

Για παράδειγμα, αν ο ήχος μας ξεκινάει από 300 Hz και θέλουμε να μεταδώσουμε σε μια συχνότητα 1 MHz, τότε η ζώνη μετάβασης έχει πλάτος $\frac{2 \cdot 300}{10^6} = 6 \cdot 10^{-4} = 0.06\%$, που είναι κάτι πολύ μικρό για τις δυνατότητες των φίλτρων.

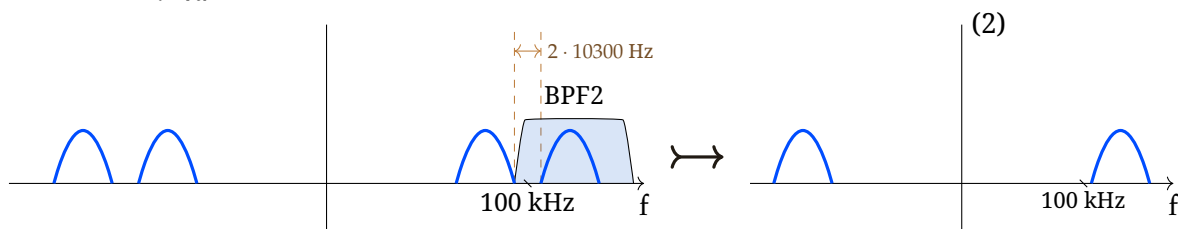
2.4.1 Μία τεχνική αποκοπής συχνότητας

Για να λύσουμε το παραπάνω πρόβλημα, σκεφτόμαστε αν μπορούμε να μετακινήσουμε ελαφρά το σήμα μας στη συχνότητα, ουσιαστικά αυξάνοντας τη συχνότητα f_a . Πράγματι, αυτό μπορεί να γίνει εφαρμόζοντας την προηγούμενη διαδικασία (διαμόρφωση DSB-SC + BPF), αλλά αυξάνοντας τη συχνότητα μόνο κατά κάποια μικρή τιμή, π.χ. 10 kHz, και όχι αμέσως 1 MHz:



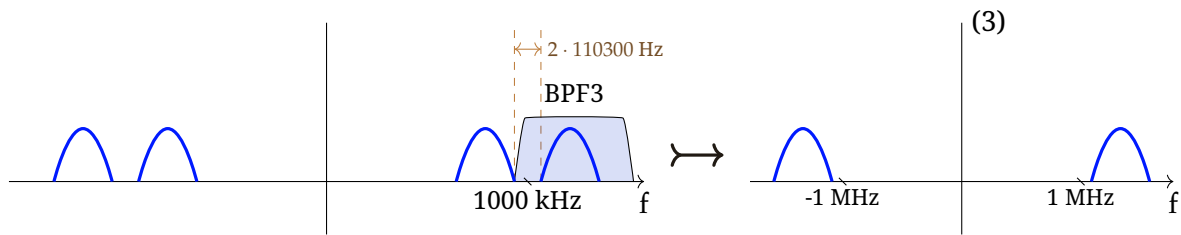
Πράγματι, το νέο αυτό φίλτρο έχει ζώνη μετάβασης $\frac{2 \cdot 300}{10k} = 6\%$ που είναι όντως υλοποιήσιμο!

Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία, διαμορφώνοντας και μετακινώντας το σήμα μας αυτήν τη φορά από τα 10 kHz μέχρι τα 100 kHz:



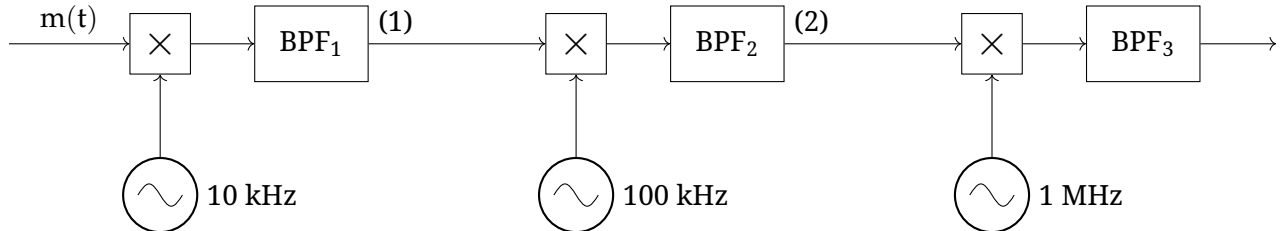
Με ζώνη μετάβασης $\frac{2 \cdot 10600}{100 \cdot 10^3} = 21.2\%$, που είναι απόλυτα υλοποιήσιμη.

Και ξανά για 100 kHz σε 1 Mhz:



Με ζώνη μετάβασης $\frac{2 \cdot 110600}{10^6} = 22.12\%$, που είναι και αυτό υλοποιήσιμο φίλτρο, και έχουμε φτάσει στο ζητούμενο, διαμορφωμένο κατά USB, σήμα.

Συνοπτικά, το κύκλωμα αποτελείται από μια σειρά πολλαπλαστικών διαμορφωτών και φίλτρων:



Και, αν θέλουμε, μειώνουμε τη συχνότητα του τελευταίου ταλαντωτή ώστε το σήμα να πέσει ακριβώς επάνω στην f_c του φέροντος.

2.4.2 Μελέτη στο πεδίο του χρόνου

Ας μελετήσουμε και τις χρονικές εξισώσεις του LSB.

Για ευκολία, θεωρούμε ότι το σήμα μας είναι ένα ημίτονο:

$$m(t) = A_m \cos 2\pi f_m(t)$$

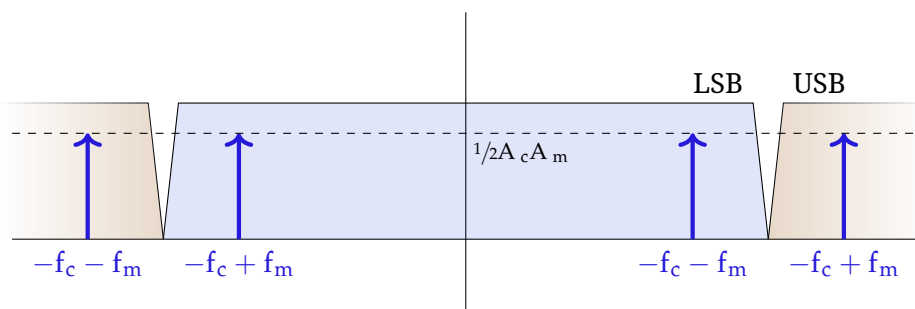
και έχουμε και το φέρον:

$$A_c \cos 2\pi f_c t$$

με $f_c \gg f_m$.

Από τη διαμόρφωση DSB-SC θυμόμαστε ότι η έξοδος του διαμορφωτή είναι το σήμα πολλαπλασιασμένο με το φέρον:

$$s_{\text{DSB-SC}} = \frac{1}{2} A_c A_m \cos [2\pi(f_c + f_m)t] + \frac{1}{2} A_c A_m \cos [2\pi(f_c - f_m)t]$$



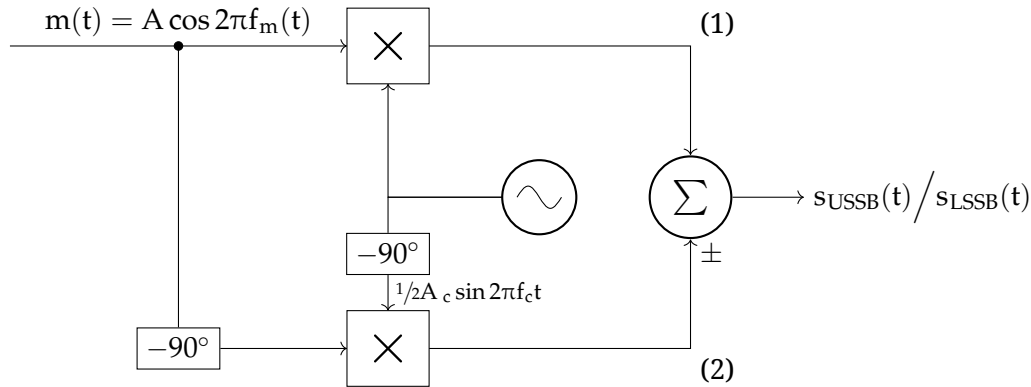
και για να εφαρμόσουμε USB παίρνουμε ένα υπερπαρατό/ζωνοπερατό φίλτρο, όπως φαίνεται στο διάγραμμα:

$$\begin{aligned} s_{\text{USB}}(t) &= \frac{1}{2} A_c A_m \cos [2\pi(f_c + f_m)t] \\ &= \frac{1}{2} A_c A_m \cos 2\pi f_c t \cos 2\pi f_m t - \frac{1}{2} A_c A_m \sin 2\pi f_c t \sin 2\pi f_m t \end{aligned}$$

και αντίστοιχα για LSB, παίρνουμε ένα χαμηλοπερατό φίλτρο για την κάτω πλευρική ζώνη:

$$s_{\text{LSB}} = \frac{1}{2} A_c A_m \cos 2\pi f_c t \cos 2\pi f_m t + \frac{1}{2} A_c A_m \sin 2\pi f_c t \sin 2\pi f_m t$$

Επομένως, μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν διαμορφωτή, ο οποίος αφαιρεί ουσιαστικά την κάτω πλευρική ζώνη, με βάση τους παραπάνω τύπους:



Αυτός ο υπολογισμός πραγματοποιήθηκε για έναν απλό τόνο. Ας τον εφαρμόσουμε ξανά για μια περιοδική κυματομορφή (δηλαδή ένα άθροισμα ημιτόνων):

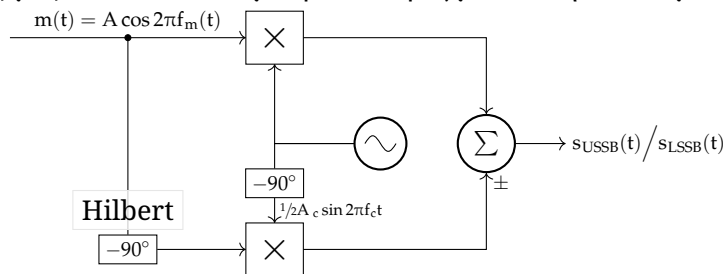
$$m(t) = A_m \sum_n a_n \cos(2\pi f_n t)$$

και τότε θα προκύψει π.χ.

$$s_{\text{USSB}}(t) = \frac{1}{2} A_c A_m \cos 2\pi f_c t \sum_n a_n \cos(2\pi f_n t) - \frac{1}{2} A_c A_m \sin 2\pi f_c t \sum_n a_n \sin(2\pi f_n t)$$

και το κύκλωμα διαμόρφωσης θα λειτουργεί ακριβώς με τον ίδιο τρόπο. Ακόμα και η περιστροφή φάσης κατά 90°, είναι ουσιαστικά ένα κύκλωμα καθυστέρησης στο χρόνο, που ονομάζεται *μετατροπέας φάσης (phase shifter)*.

Στη γενική περίπτωση, ορίζουμε ως **μετασχηματισμό Hilbert** τη στροφή της φάσης του σήματός μας κατά 90°, που μπορεί να πραγματοποιηθεί ακόμα και για μη περιοδικά σήματα.



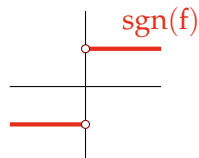
2.4.3 Μετασχηματισμός Hilbert

Ορισμός 2.2: Μετασχηματισμός Hilbert

Ο **μετασχηματισμός Hilbert** είναι ένα φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(f) = -j \operatorname{sgn} f$$

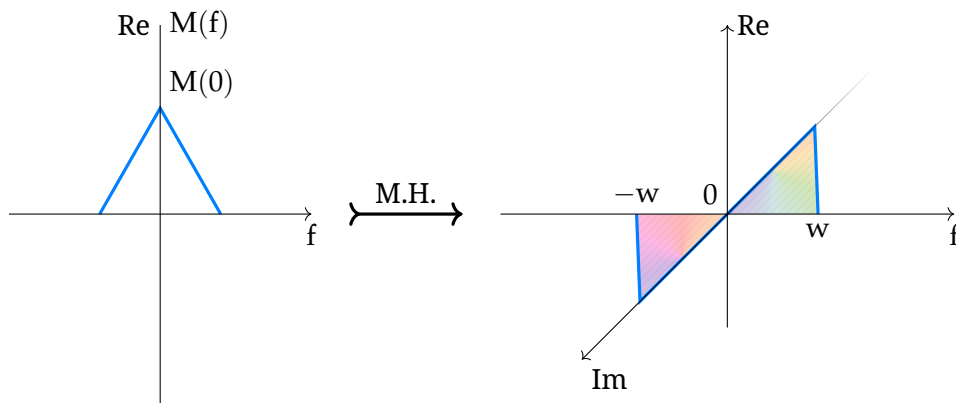
Θυμόμαστε τη συνάρτηση sgn :



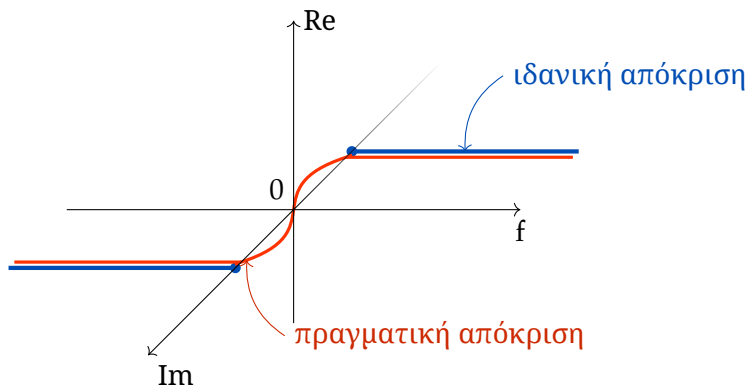
Ο Μ/Σ Hilbert έχει κρουστική απόκριση:

$$h(t) = \frac{1}{\pi t}$$

Ο μετασχηματισμός βάζει ένα j και αλλάζει το πρόσημο της συνάρτησης. Πιο συγκεκριμένα, μεταβάλλει το σήμα κατά -90° στις θετικές συχνότητες, και 90° στις αρνητικές συχνότητες. Για παράδειγμα:



Ο μετασχηματισμός Hilbert είναι ένας Wide-Band Phase Shifter (WBPS). Και εδώ βρίσκεται το πρόβλημα. Ο μετασχηματισμός Hilbert είναι ένα ιδανικό φίλτρο που δεν μπορεί να εφαρμοστεί στην πραγματικότητα:

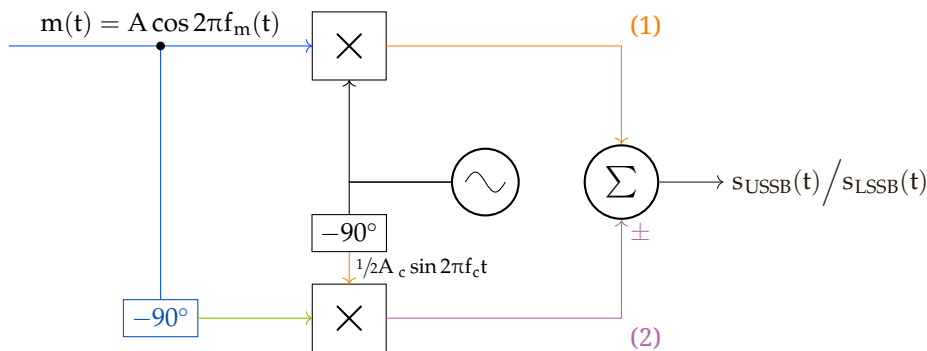


Σε ακουστικά σήματα οι ατέλειες αυτές μπορούν να παραβλεφθούν, αλλά σε άλλα σήματα μπορεί να υπάρχει αισθητή παραμόρφωση.

Επομένως, και οι δύο διαμορφωτές παρουσιάζουν προβλήματα, ο πρώτος στην υλοποίηση του φίλτρου, και ο δεύτερος στην υλοποίηση του phase shifter.

2.4.4 Επιστροφή στο πεδίο των συχνοτήτων

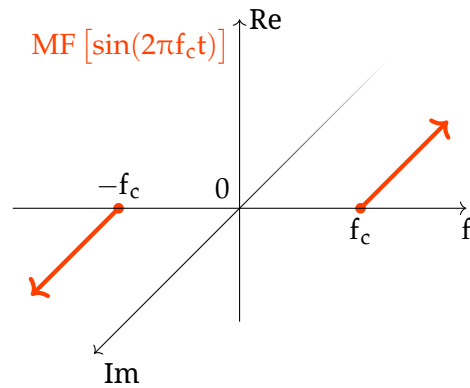
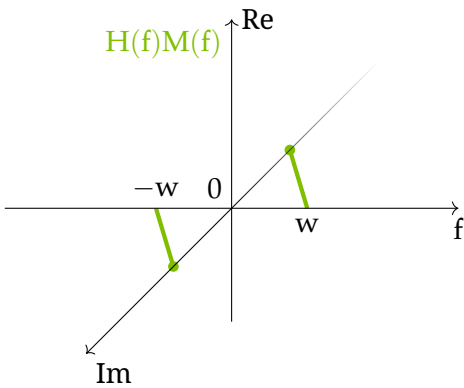
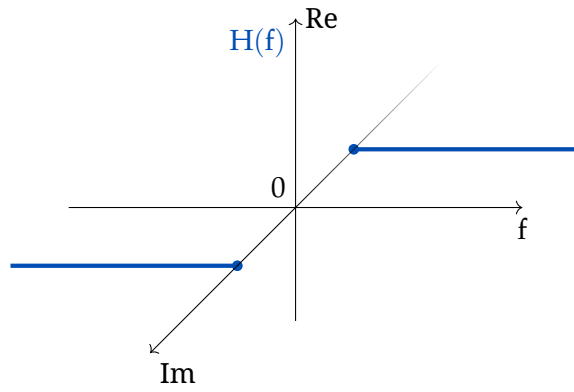
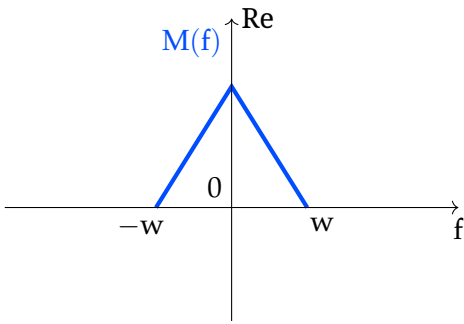
Θα αναλύσουμε το παραπάνω κύκλωμα στη συχνότητα:



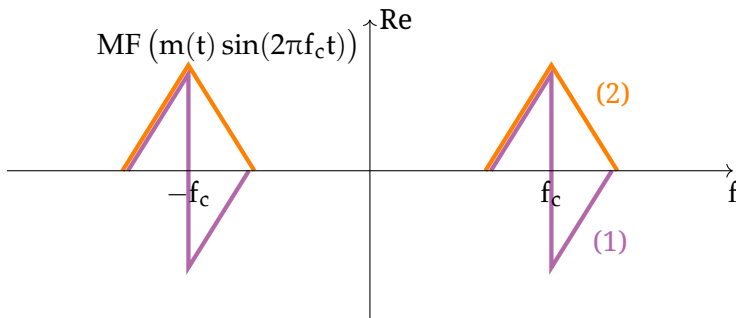
Θυμόμαστε το σήμα κατά SSB:

$$s_{\text{USSB}}(t) = \frac{1}{2} A_c m(t) \cos 2\pi f_c t - \frac{1}{2} A_c \hat{m}(t) \sin 2\pi f_c t$$

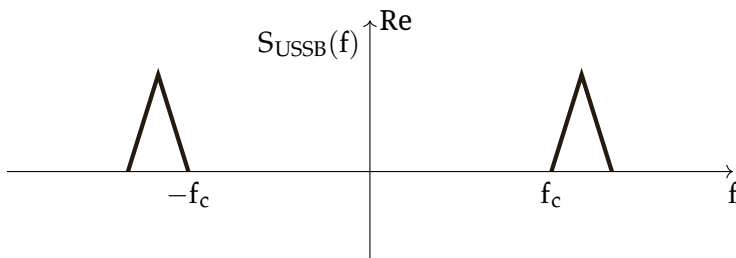
και βλέπουμε στο πεδίο των συχνοτήτων:



Μετά από τη συνέλιξη του $H(f)M(f)$ με το μετασχηματισμό του $\sin(2\pi f_c t)$, πολλαπλασιάζονται τα φανταστικά μέρη, $j \cdot j = -1$, επομένως τα σήματα που πηγαίνουν στον αθροιστή επιστρέφουν στο πραγματικό επίπεδο και μοιάζουν κάπως έτσι:

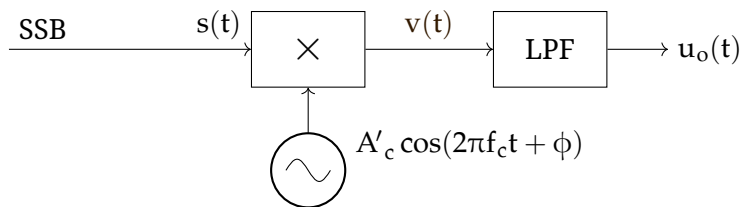


Και τελικά, καθώς προστίθενται, ουσιαστικά αφαιρείται η κάτω πλευρική ζώνη, και παραμένει μόνο η επάνω πλευρική ζώνη:



2.4.5 Αποδιαμόρφωση

Το διάγραμμα του αποδιαμορφωτή είναι το εξής:



Κάνουμε τις πράξεις:

$$s(t) \cdot A'_c \cos(2\pi f_c t + \phi) \Big|_{\text{LPF}} = \frac{A_c A'_c}{4} m(t) \sin \phi \cos \phi \mp \frac{A_c A'_c}{4} \hat{m}(t) \sin \phi$$

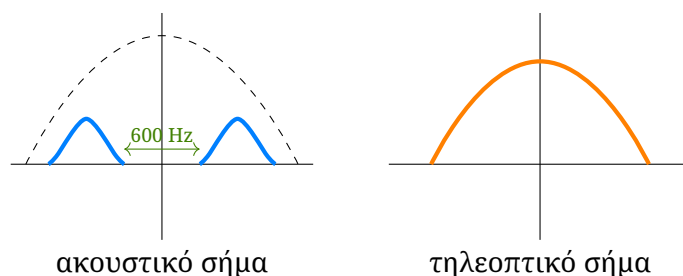
Αν πετύχουμε ακριβώς τη φέρουσα συχνότητα, δηλαδή αν βρούμε τη φάση του φέροντος και $\phi = 0$ (που απαιτεί κύκλωμα συγχρονισμού - άρα έχουμε **ομόδυνο ή σύγχρονο** αποδιαμορφωτή, που είναι δυσκολότερος και πιο παλιά ακριβότερος), τότε:

$$u_o(t) = \frac{A_c A'_c}{4} m(t)$$

Σε διαφορετική περίπτωση όμως, προστίθεται ο όρος $\frac{A_c A'_c}{4} \hat{m}(t) \sin \phi$, ο οποίος είναι μια παραμόρφωση που είναι ουσιαστικά το σήμα μετασχηματισμένο κατά Hilbert. Αυτός ο όρος εισάγει μια διαφορά φάσης, η οποία παραμορφώνει ιδιαίτερα τη φωνή, προκαλώντας το **φαινόμενο Donald Duck**. Αυτό απέτρεψε τη χρησιμοποίησή αυτού του είδους διαμόρφωσης στην κλασική ραδιοφωνία, παρά μόνον συνήθως για εσωτερική χρήση στη βιομηχανία, όταν απαιτείται εξοικονόμηση φάσματος.

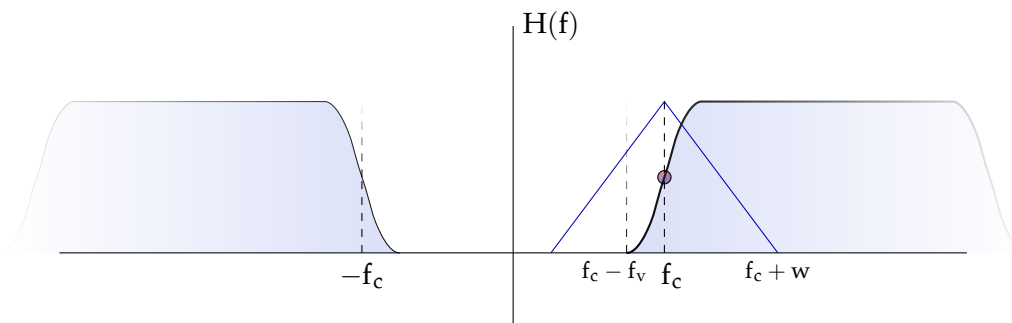
2.5 VSB

Η παραπάνω ανάλυση έχει νόημα όταν μιλάμε για ακουστικά σήματα, τα οποία δεν ξεκινάνε από τα 0 Hz, αλλά π.χ από τα 300 Hz, επιτρέποντας την ευκολότερη υλοποίηση του φίλτρου ή του μεταφορέα φάσης. Σε υπόλοιπα (π.χ. τηλεοπτικά) σήματα όμως δεν ισχύει αυτό:



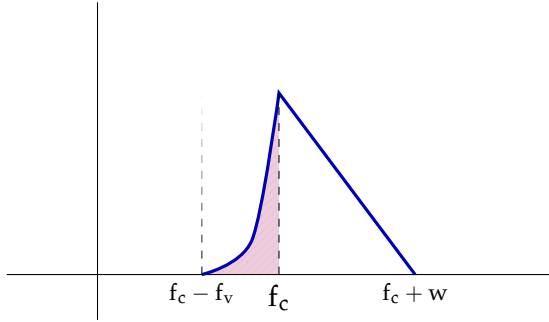
Για αυτό το λόγο, σκεφτόμαστε ένα άλλο είδος διαμόρφωσης, στο οποίο δεν κόβουμε ολόκληρη την π.χ. κάτω πλευρική ζώνη της πληροφορίας, αλλά επιτρέπουμε να περάσει και ένα κομμάτι από αυτήν:

Αυτή η διαμόρφωση ονομάζεται **VSB (Vestigial Side Band)** και έχει απόκριση της μορφής:

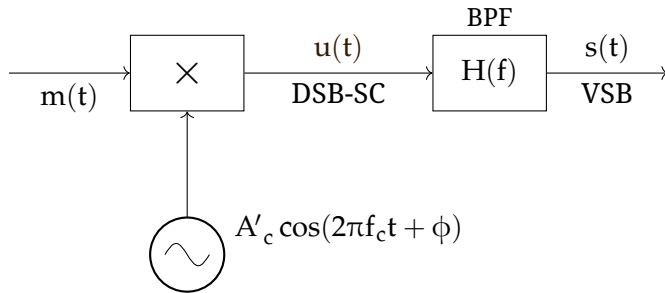


Βέβαια παρατηρούμε ένα πρόβλημα, το οποίο θα προσπαθήσουμε να διορθώσουμε αργότερα. Συγκεκριμένα ότι το σήμα εξόδου μετά το φίλτρο δεν θα περιέχει μόνο την πάνω πλευρική ζώνη,

αλλά και ένα μέρος της κάτω, οδηγώντας σε κάποια παραμόρφωση:



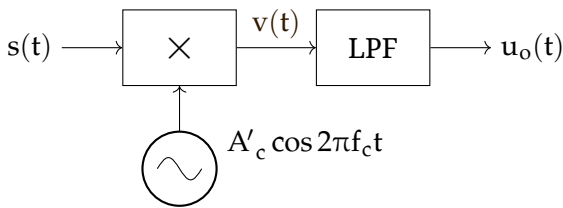
Ο διαμορφωτής μοιάζει κάπως έτσι:



και πολύ απλά εφαρμόζει το παραπάνω φίλτρο στην εκπεμπόμενη συχνότητα:

$$S(f) = U(f)H(f) = \frac{A_c}{2} [M(f - f_c) + M(f + f_c)]$$

Ο αποδιαμορφωτής είναι ομόδυνος:



Για αυτόν ισχύει:

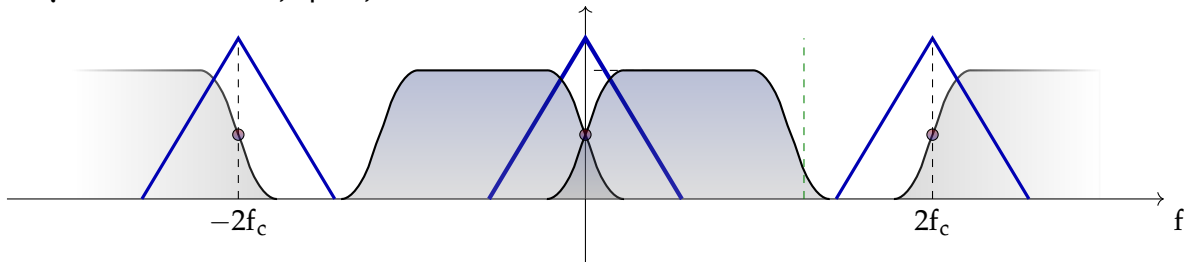
$$v(t) = A'_c \cos 2\pi f_c t s(t)$$

$$V(f) = \frac{A'_c}{2} [S(f - f_c) + S(f + f_c)]$$

$$= \frac{A'_c A_c}{4} [M(f - 2f_c) + M(f)] H(f - f_c) + \frac{A'_c A_c}{4} [M(f) + M(f + 2f_c)] H(f + f_c)$$

$$= \frac{A'_c A_c}{4} M(f) [H(f - f_c) + H(f + f_c)] + \frac{A'_c A_c}{4} [M(f - 2f_c)H(f - f_c) + M(f + 2f_c)H(f + f_c)]$$

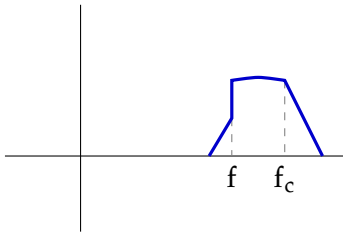
Ας δούμε έναν-έναν τους όρους:



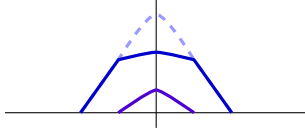
Παρατηρούμε ότι στο κέντρο υπάρχει η επίδραση και των δύο φίλτρων επάνω στο σήμα. Για να πάρουμε το αρχικό, θα πρέπει η πρόσθεσή τους να μην επηρεάζει την έξοδο, δηλαδή:

$$H(f - f_c) + H(f + f_c) = 1$$

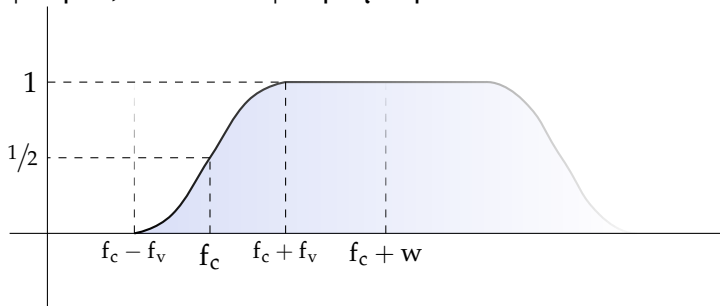
Σε διαφορετική περίπτωση, η έξοδος θα είναι παραμορφωμένη:



Ενώ, αν έχουμε σωστά ρυθμισμένα φίλτρα σύμφωνα με παραπάνω, θα προστίθενται τα δύο σήματα για να πάρουμε το τέλει αρχικό:



Δηλαδή, το χαρακτηριστικό που απαιτούμε είναι η απλώς η περιττή συμμετρία (γύρω από το f_c) του φίλτρου, και τέτοια φίλτρα μπορούν να κατασκευαστούν:



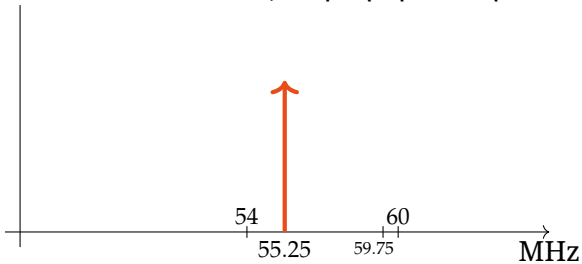
Ως άσκηση για το σπίτι αφήνεται η γεωμετρική απόδειξη του ότι η απλή συμμετρία του φίλτρου σημαίνει ότι και το ύψος του αθροίσματος θα παραμένει σταθερό (βλ. **Κεφάλαιο 2.7**).

Με βάση αυτήν τη διαμόρφωση λειτουργεί η αναλογική τηλεόραση.

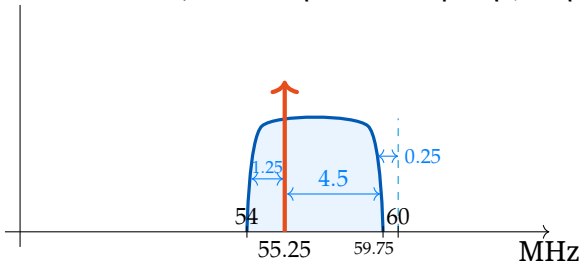
2.5.1 Λίγα λόγια για την τηλεόραση

Το εύρος ζώνης ενός τηλεοπτικού καναλιού είναι τυπικά 6 MHz, και εκπέμπεται σε κάποια συχνότητα μεταξύ 54-216 MHz (VHF, με ένα κενό για τα FM) ή 470-890 MHz (UHF).

Ας ασχοληθούμε με ένα κανάλι μεταξύ 54-60 MHz. Αρχικά, στέλνουμε έναν κλασικό AM τόνο στα 55.25 MHz, ο οποίος θα βοηθήσει στην αποδιαμόρφωση (ώστε να γίνει φθηνότερη):



Στη συνέχεια, απλώνουμε το φάσμα μεταξύ 54 ως 59.75 MHz (αφήνοντας 0.25 MHz στα δεξιά για τον ήχο διαμορφωμένο κατά FM). Τα 1.25 MHz στα αριστερά του δέλτα είναι η κάτω πλευρική ζώνη, και τα 4.5 στα δεξιά είναι η άνω πλευρική ζώνη.

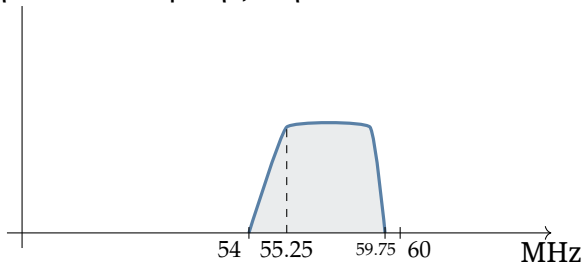


Η μορφή του σήματος που στέλνουμε οφείλεται στον τρόπο που λειτουργούσαν οι τηλεοράσεις CRT: Ένα κανόνι ηλεκτρονίων σκανάρει την οθόνη κατά γραμμές και στήλες - σκανάρει πρώτα τα κελιά μιας γραμμής, μετά της επόμενης, κ.ό.κ. Επομένως, το σήμα αποτελείται από τις φωτεινότητες

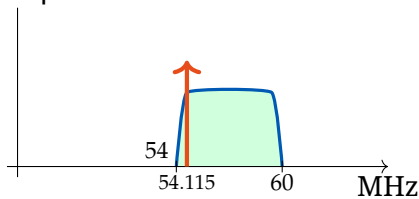
των κελιών της πρώτης γραμμής, μετά ένα κενό (που γίνεται παλμός στο σήμα) μέχρι το κανόνι να μεταφερθεί στην επόμενη γραμμή, στη συνέχεια τις φωτεινότητες της επόμενης γραμμής κ.ό.κ.

Με τους παραπάνω παλμούς μπορεί τα επιτευχθεί και συγχρονισμός, ενώ κάποιες τεχνικές πολυπλεξίας χρησιμοποιήθηκαν και για τη μεταφορά πληροφοριών χρώματος.

Από τη μεριά του δέκτη, η αποδιαμόρφωση μπορεί να γίνει χωρίς να δίνουμε πολλή σημασία στην κάτω πλευρική ζώνη:



Αντίστοιχα, ένα ψηφιακό τηλεοπτικό σήμα (π.χ. με ρυθμό 20 Mbit/s) μπορεί να χωρέσει με παρόμοιο τρόπο στα 6 MHz:



2.6 Εφαρμογές

1. Μερικές διαμορφώσεις:

$$\text{AM } s(t) = A_c (1 + k_a m(t)) \cos 2\pi f_c t$$

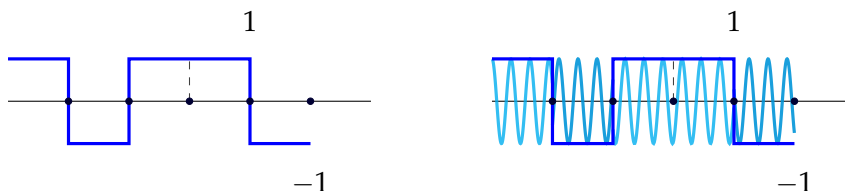
$$\text{DSB-SC } s(t) = A_c m(t) \cos 2\pi f_c t$$

$$\begin{aligned} \text{SSB } s(t) &= \frac{1}{2} A_c m(t) \cos 2\pi f_c t \mp \frac{1}{2} A_c \hat{m}(t) \sin 2\pi f_c t \\ &= \frac{1}{2} A_c \sqrt{m^2(t) + \hat{m}^2(t)} \cos (2\pi f_c t + \phi(t)) \end{aligned}$$

όπου $\phi(t) = \tan^{-1} \frac{\hat{m}(t)}{m(t)}$.

Οι πρώτες δύο διαμορφώσεις έχουν την πληροφορία μόνο στο πλάτος, αλλά η τελευταία την περιλαμβάνει και στην φάση $\phi(t)$.

Αν φανταστούμε όμως ότι η πληροφορία αποτελείται από δύο ψηφιακά σήματα, στα οποία το πλάτος 1 αναπαριστά το 1 και το -1 αναπαριστά το ψευδές, τότε το μέτρο θα είναι πάντα $\sqrt{2}$, αλλά μόνο η φάση θα μεταβάλλεται. Αυτή η διαμόρφωση χρησιμεύει για τη μετάδοση ψηφιακών δεδομένων και ονομάζεται QPSK (Quadrature Phase-Shift Keying).

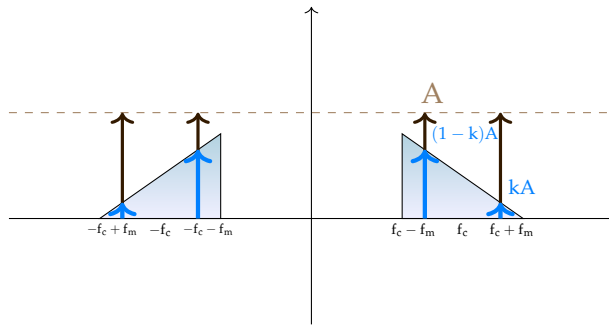


2. Έστω τα σήματα πληροφορίας και φέροντος:

$$m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$$

$$c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$$

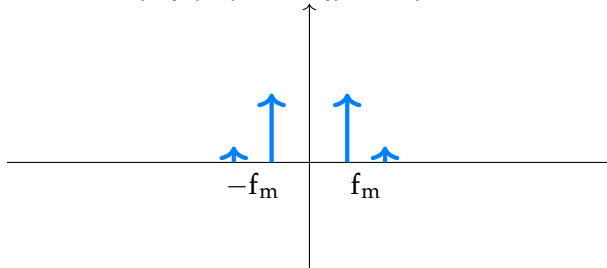
Έστω ότι θέλουμε να διαμορφώσουμε την πληροφορία κατά SSB. Πρώτα τη διαμορφώνουμε κατά DSB, και μετά εφαρμόζουμε ένα φίλτρο:



Το φίλτρο αυτό κόβει την κάτω πλευρική ζώνη και αφήνει να περάσει ένα ίχνος της, και κόβει και την πάνω πλευρική ζώνη, αφήνοντας να περάσει ένα ακόμα μικρότερο ίχνος της.

Δηλαδή κόβει ένα ποσοστό k (π.χ 2%) από την επάνω (άρα αφήνει να περάσει το $(1 - k)$ ή π.χ. το 98%), και αφήνει να περάσει ένα ποσοστό k από την κάτω (αν θεωρήσουμε ότι το φίλτρο είναι συμμετρικό).

Το αποδιαμορφωμένο σήμα θα μοιάζει κάπως έτσι:



Το διαμορφωμένο σήμα, όπως παρατηρούμε από το πεδίο των συχνοτήτων, θα έχει τη μορφή:

$$\begin{aligned}
 s_{USB}(t) &= \frac{1}{2}kA_c A_m \cos 2\pi(f_c + f_m)t + \frac{1}{2}(1 - k)A_c A_m \cos 2\pi(f_c - f_m)t \\
 &= \frac{1}{2}kA_c A_m (\cos 2\pi f_c t \cos 2\pi f_m t - \sin 2\pi f_c t \sin 2\pi f_m t) \\
 &\quad + \frac{1}{2}(1 - k)A_c A_m (\cos 2\pi f_c t \cos 2\pi f_m t + \sin 2\pi f_c t \sin 2\pi f_m t) \\
 &= \underbrace{\frac{1}{2}A_c A_m \cos 2\pi f_m t \cos 2\pi f_c t}_{DSB-SC} + \underbrace{\frac{1}{2}A_c A_m (1 - 2k) \sin 2\pi f_m t \sin 2\pi f_c t}_{DSB-SC \text{ στον μετασχηματισμό Hilbert}}
 \end{aligned}$$

Δηλαδή μπορούμε να φτάσουμε στην έξοδο διαμορφώνοντας δύο φορές κατά DSB-SC (τη δεύτερη την εφαρμόζουμε στο phase-shifted κατά 90° σήμα).

Η σταθερά k εξαρτάται από την κλίση του φίλτρου που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε διαφορετικές περιπτώσεις:

- 1) Για $k = \frac{1}{2}$, έχουμε *DSB-SC*
- 2) Για $k = 0$, έχουμε *LSSB*
Για $k = 1$, έχουμε *USSB*
- 3) Για $0 \leq k \leq \frac{1}{2}$, έχουμε *VSB* (πάνω πλευρική ζώνη)
Για $\frac{1}{2} \leq k \leq 1$, έχουμε *VSB* (κάτω πλευρική ζώνη)

Δηλαδή μπορούμε να πάρουμε όλες τις διαμορφώσεις που παρουσιάσαμε με κατάλληλη επιλογή του k , εκτός από το AM.

Για την **αποδιαμόρφωση**, θα χρειαστεί σίγουρα να έχουμε *σύμφωνο/σύγχρονο/ομόδυνο/coherent* αποδιαμορφωτή (που μπορεί να βρει τη φάση του φέροντος), ο οποίος πρέπει να γνωρίζει τη φάση του φέροντος η οποία:

- Προκύπτει στον ταλαντωτή και δεν είναι γνωστή στο δέκτη

- Μπορεί να μεταβάλλεται αργά στον ταλαντωτή και δεν έχει σταθερή τιμή
- Αλλάζει ανάλογα με το μέσο διάδοσης του κύματος και τυχόν εμπόδια

Τυπικά για την υλοποίηση του αποδιαμορφωτή, αν θεωρήσουμε ότι κάπως έχουμε βρει τη φάση του φέροντος, πολλαπλασιάζουμε το λαμβανόμενο σήμα με τη συχνότητα του φέροντος:

$$\begin{aligned}
 v(t) &= s_{\text{USB}}(t) A'_c \cos 2\pi f_c t \\
 &= \left[\frac{1}{2} A_c A'_c A_m \cos 2\pi f_m t \right] \cos^2 2\pi f_c t + \frac{1}{2} \cos 2\pi 2f_c t \\
 &\quad + \left[\frac{1}{2} A_c A'_c A_m (1 - 2k) \sin 2\pi f_m t \right] \sin 2\pi f_c t \cos 2\pi f_c t + \frac{1}{2} \sin 2\pi 2f_c t \\
 v(t)|_{\text{LPF}} &= \frac{1}{4} A_c A'_c A_m \cos 2\pi f_m t \rightarrow m(t)
 \end{aligned}$$

Έστω όμως ότι στέλνω ένα σήμα $s_{\text{VSB+C}}(t) = A_c \cos 2\pi f_c t + k_a s_{\text{VSB}}(t)$, δηλαδή VSB μαζί όμως με το φέρον. Τότε το σήμα που στέλνω είναι:

$$\begin{aligned}
 s_{\text{VSB+C}}(t) &= A_c \cos 2\pi f_c t + k_a s_{\text{VSB}}(t) \\
 &= \dots = A_c \left[1 + \frac{k_a}{2} A_m \cos(2\pi f_m t) \right] \cos 2\pi f_c t + \left[\frac{k_a}{2} A_c A_m (1 - 2k) \sin(2\pi f_m t) \right] \sin 2\pi f_c t \\
 &= A(t) \cdot \cos(2\pi f_c t + \phi(\tau))
 \end{aligned}$$

όπου:

$$\begin{aligned}
 A(t) &= \sqrt{A_c^2 \left[1 + \frac{k_a}{2} A_m \cos(2\pi f_m t) \right]^2 + A_c^2 \left[\frac{k_a}{2} A_m (1 - 2k) \sin(2\pi f_m t) \right]^2} \\
 &= A_c \left[1 + \frac{k_a}{2} A_m \cos(2\pi f_m t) \right] \sqrt{1 + \left(\frac{\frac{k_a}{2} A_m (1 - 2k) \sin 2\pi f_c t}{1 + \frac{k_a}{2} A_m \cos 2\pi f_m t} \right)^2}
 \end{aligned}$$

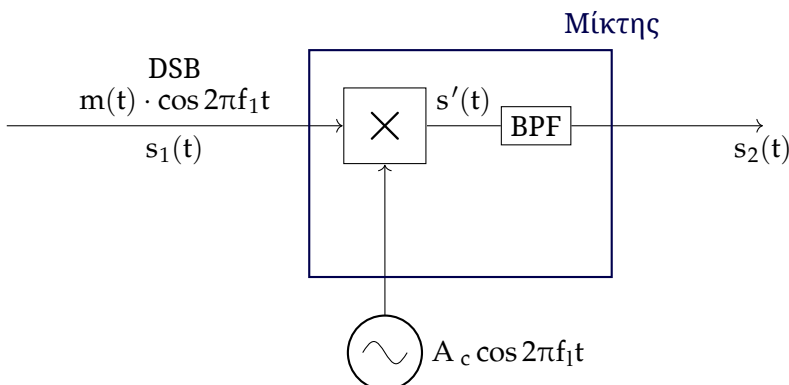
Δηλαδή έχουμε μία διαμόρφωση AM $1 + \frac{k_a}{2} A_m \cos(2\pi f_m t)$ μαζί με μία παραμόρφωση $\sqrt{1 + (\dots)^2}$, την οποία θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε όσο περισσότερο γίνεται. Αυτό δικαιολογεί και το ότι για την αποδιαμόρφωση του τηλεοπτικού σήματος αρκεί μόνο ένας αποδιαμορφωτής FM.

Στόχος μας είναι να ελαχιστοποιήσουμε την παραμόρφωση, άρα τον όρο:

$$\left[\frac{\mu(1 - 2k) \sin 2\pi f_c t}{1 + \mu A_m \cos 2\pi f_m t} \right]^2$$

(όπου $\mu = \frac{1}{2} k_a A_m$), τον οποίο μπορούμε να ρυθμίσουμε επιλέγοντας τις σταθερές της διαμόρφωσης A_m , το συντελεστή του φέροντος k_a , ή την κλίση k του φίλτρου.

3. Θυμόμαστε τη βασική λειτουργία του πολλαπλασιαστικού διαμορφωτή (όπου f_1 η συχνότητα φέροντος του εισερχόμενου σήματος, και f_1 η συχνότητα του τοπικού ταλαντωτή):

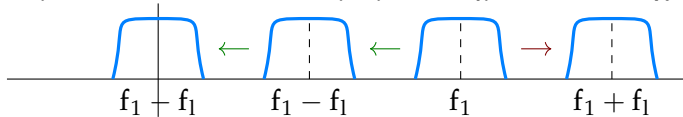


με έξοδο:

$$s'(t) = s_1(t)A_c \cos(2\pi f_1 t)$$

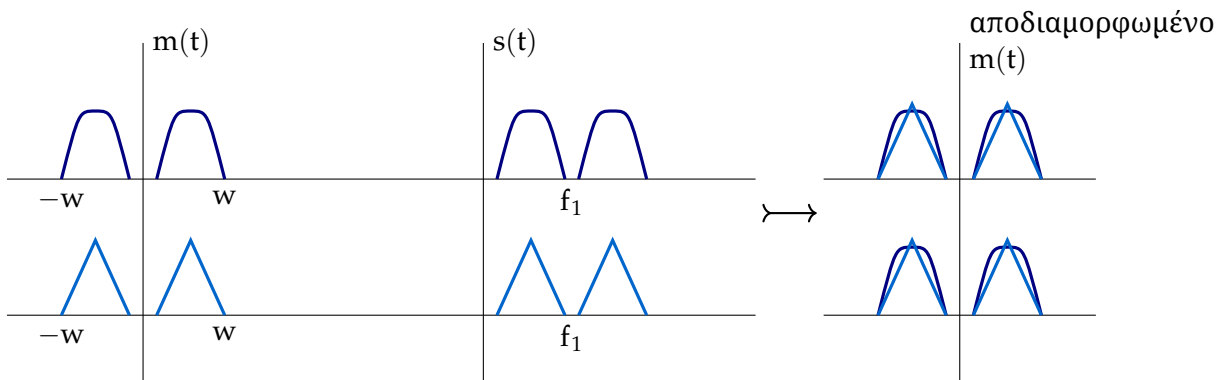
$$= \frac{1}{2}A_c m(t) [\cos 2\pi(f_1 + f_1)t + \cos 2\pi(f_1 - f_1)t]$$

όπου μπορούμε να επιλέξουμε ποιός μόνον από τους δύο όρους ($f_1 + f_1$ ή $f_1 - f_1$, και ονομάζουμε τη διαδικασία up conversion ή down conversion αντίστοιχα) θα βγει στην έξοδο από το Band Pass φίλτρο. Με κατάλληλη επιλογή της f_1 και του φίλτρου, μπορούμε να ελέγξουμε ποιά συχνότητα εξόδου θέλουμε να πολλαπλασιάσουμε με το σήμα, ώστε να έχουμε όποια μετατόπιση θέλουμε στην έξοδο:

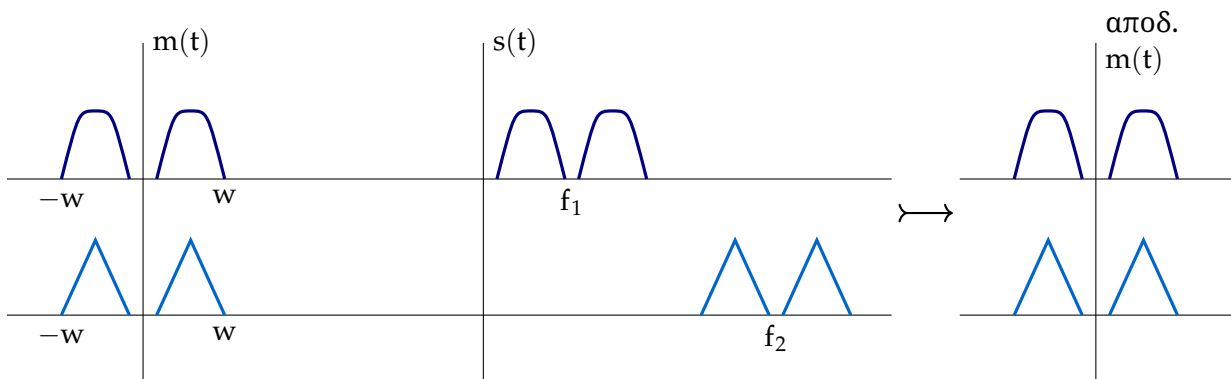


4. Πολυπλεξία (multiplexing) Είναι γνωστό πως στον αέρα σήμερα υπάρχει μεγάλος αριθμός διαμορφωμένων τηλεοπτικών, ραδιοφωνικών, κλπ. σημάτων. Ας εξετάσουμε πώς είναι δυνατό να στέλνονται όλα αυτά ταυτόχρονα.

FDMA Προφανώς αν στείλουμε δύο διαμορφωμένα σήματα στην ίδια συχνότητα ταυτόχρονα χωρίς παραπάνω επεξεργασία, ο δέκτης θα αποδιαμορφώσει το άθροισμα τους, και δεν μπορούμε να πάρουμε το καθένα ξεχωριστά.



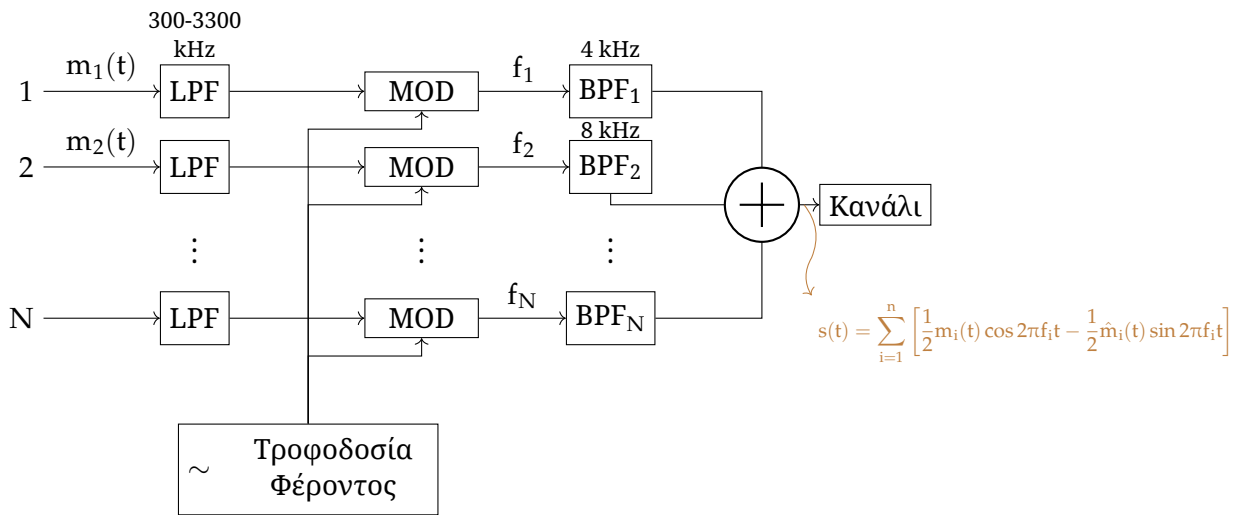
Αν όμως δώσουμε στο κάθε σήμα τη δική του συχνότητα, τότε ο κάθε δέκτης μπορεί να συντονιστεί στο επιθυμητό σημείο και να δώσει κάθε σήμα ξεχωριστά, όπως επιθυμούμε:



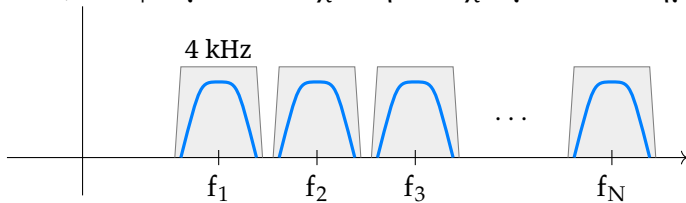
Αυτή η τεχνική ονομάζεται **Frequency-Division Multiple Access (FDMA)**, δηλαδή πολυπλεξία στη συχνότητα.

Για παράδειγμα, ένας τηλεπικοινωνιακός οργανισμός που θέλει να στείλει πολλά σήματα φωνής μέσω ενός καναλιού (π.χ. καλωδίου), μπορεί να διαμορφώνει κάθε σήμα και να του αναθέτει το δικό του πεδίο συχνοτήτων.

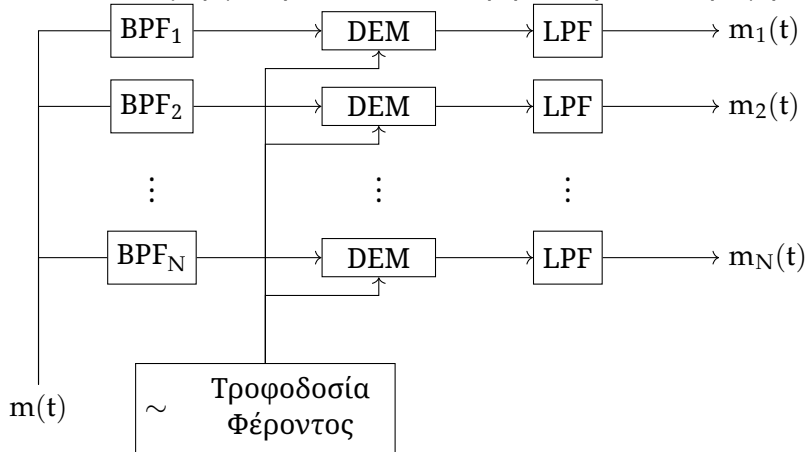
Για παράδειγμα, αν έχουμε N φωνητικά σήματα (θεωρούμε ότι έχουν εύρος ζώνης μεταξύ 300-3300 Hz, δηλαδή περίπου 4 kHz), τότε πρέπει να διαμορφώσουμε το καθένα ξεχωριστά, με πολλαπλάσια μιας βασικής συχνότητας φέροντος (π.χ. 4 kHz):



Έτσι, στο φάσμα των συχνοτήτων έχουμε πολλά σήματα κολλημένα μεταξύ τους:

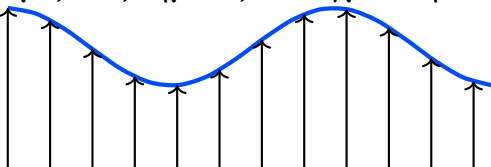


Και ο αποδιαμορφωτής ακολουθεί ακριβώς την αντίστροφη διαδικασία:

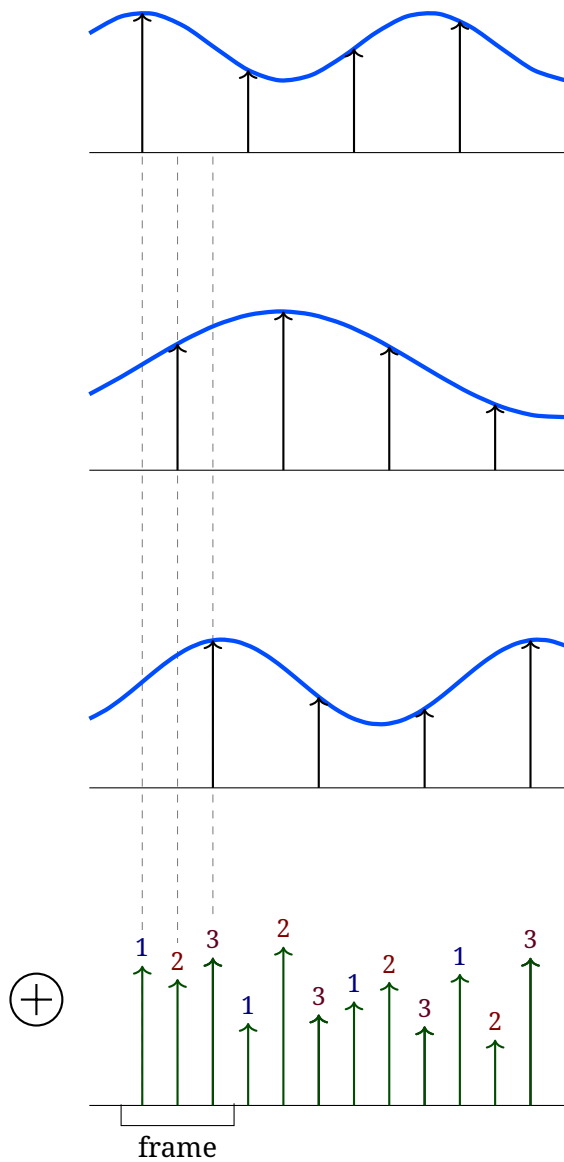


Για τον επιπλέον έλεγχο του φάσματος, τα σήματα μπορεί να ενώνονται σε ομάδες, οι οποίες ενώνονται σε υπερομάδες, και στη συνέχεια σε super-groups, ενώ για δημόσια κανάλια (π.χ. για ραδιοφωνικούς σταθμούς) μπορεί να υπάρχει κάποιος οργανισμός που να ελέγχει την κατανομή των συχνοτήτων.

TDMA Η ιδέα του **Time-Division Multiple Access (TDMA)** βασίζεται στο ότι για να πάρουμε τις τιμές ενός σήματος το δειγματοληπτούμε ανά τακτά χρονικά διαστήματα:



Σκεφτόμαστε αν π.χ. έχουμε 3 σήματα, κάθε φορά που δειγματοληπτείται το πρώτο, μετά από λίγο να δειγματοληπτείται το δεύτερο, μετά το τρίτο, και μετά να ξεκινάμε ξανά από την αρχή, δειγματοληπτώντας το πρώτο, το δεύτερο, κ.ό.κ:

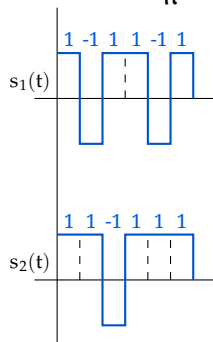


Έτσι, μέσα σε κάθε frame (χρονοθυρίδα), μπορούμε να δειγματοληπτήσουμε πολλά (π.χ. 100) διαφορετικά σήματα.

Η τεχνική αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για ψηφιακά σήματα, ενώ είναι δυνατόν να συνδυαστεί με το FDMA για πολυπλεξία ακόμα περισσότερων σημάτων.

CDMA Το **Code-Division Multiple Access (CDMA)** εφαρμόζεται σε ψηφιακά σήματα, που θεωρούμε ότι μπορούν να λάβουν π.χ. μόνο τις τιμές 1 ή -1.

Έστω δύο σήματα:



Με κατάλληλο πολλαπλασιασμό, άθροιση και ολοκλήρωση, θα λάβουμε ένα σήμα ευρείας μπάνας που περιέχει τα δεδομένα μας, ενώ θα είναι αντιληπτό μόνο ως θόρυβος σε κάποιον άλλον ακροατή, κάτι που έκανε αυτήν την κωδικοποίηση χρήσιμη στον Β' Παγκόσμιο Πόλεμο.

2.7 Ένα μαθηματικό ερώτημα που τέθηκε παραπάνω

Έστω $H(f)$ είναι η χαρακτηριστική μεταφοράς πλάτους ενός ζωνοπερατού φίλτρου, η οποία περιγράφεται στις θετικές συχνότητες από τη σχέση:

$$H(f) = \begin{cases} c, & f \in [f_c + f_v, f_c + w] \text{ (ζώνη διέλευσης)} \\ G(f), & f \in [f_c - f_v, f_c + f_v] \text{ (ζώνη μετάβασης)} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Η απαίτηση $H(f_c + f) + H(f_c - f) = c$ στο διάστημα $f \in [-f_v, +f_v]$ απαιτεί από το τμήμα $G(f)$ της χαρακτηριστικής να παρουσιάζει περιττή συμμετρία γύρω από το σημείο $(f_c, H(f_c))$. Να αποδειχθεί μαθηματικά και πλήρως η παραπάνω πρόταση.

2.8 Ασκήσεις

Ασκήσεις

Όλες οι ασκήσεις είναι ανεβασμένες στην ιστοσελίδα.

Έγιναν οι ασκήσεις:

- 2 από το σετ [Διαμόρφωση Πλάτους 1](#)
- 3 από το σετ [Διαμόρφωση Πλάτους 1](#)
- 3 από το σετ [Διαμόρφωση Πλάτους 2](#)
- 1 από το σετ [Διαμόρφωση Πλάτους 3](#)

Παράδειγμα Δίνεται ένα μήνυμα πληροφορίας $m(t)$ για το οποίο οι ελάχιστες και μέγιστες τιμές είναι:

$$\begin{aligned} \min [m(t)] &= -2 \\ \max [m(t)] &= +3 \end{aligned}$$

Ποιά είναι η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει ο συντελεστής k_a σύμφωνα με τη λιγότερο αυστηρή συνθήκη για την αποφυγή υπερδιαμόρφωσης;

$$\text{(Για } s(t) = A_c(1 + k_a m(t)) \cos 2\pi f_c t \text{)}$$

Λύση Θυμόμαστε τη μέθοδο αποδιαμόρφωσης του AM σήματος:

$$s(t) \xrightarrow{\text{φωρατής περιβάλλουσας}} A_c |1 + k_a m(t)| \stackrel{?}{=} A_c (1 + k_a m(t))$$

Παρατηρούμε ότι ο φωρατής βγάζει ως έξοδο το $A_c |1 + k_a m(t)|$, ενώ η επιθυμητή έξοδος είναι η $A_c (1 + k_a m(t))$. Αυτές οι δύο τιμές είναι ίσες μόνο όταν ισχύει $1 + k_a m(t) \geq 0 \implies \boxed{k_a m(t)} \geq -1$, που είναι η συνθήκη για να μην υπάρχει υπερδιαμόρφωση.

Η συνθήκη όμως που γνωρίζουμε από τη θεωρία είναι η εξής:

$$|k_a m(t)| \leq 1 \implies -1 \leq k_a m(t) \leq 1$$

που περιλαμβάνει και το κομμάτι $k_a m(t) \leq 1$, το οποίο όμως δεν επηρεάζει την ύπαρξη ή όχι της υπερδιαμόρφωσης.

Επομένως, για εμάς πρέπει να ισχύει:

$$1 + \min [k_a m(t)] \geq 0 \implies k_a \min [m(t)] \geq -1 \implies \boxed{k_a \leq \frac{1}{2}}$$

Παράδειγμα Δίνεται ένα AM σήμα:

$$A_c (a + 0.75m(t)) \cos 2\pi f_c t$$

όπου $\max [m(t)] = 2$ και $\min [m(t)] = -1$.

Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς a για:

(α) Ποσοστό διαμόρφωσης 100%

(β) Ποσοστό διαμόρφωσης 50%

Λύση

(α) Ποσοστό διαμόρφωσης 100% σημαίνει ότι το σήμα μόλις δεν υπερδιαμορφώνεται, δηλαδή το πλάτος $A_c(a + 0.75m(t))$ του συνημιτόνου μόλις φτάνει στο 0, και δεν πηγαίνει κάτω από αυτό, δηλαδή:

$$\begin{aligned} a + 0.75m(t) \geq 0 &\implies a + \min [0.75m(t)] = 0 \implies \\ &\implies a + 0.75 \min [m(t)] = 0 \implies \\ &\implies \boxed{a = 0.75} \end{aligned}$$

(β) Για να έχω ποσοστό διαμόρφωσης 50%, θα πρέπει ουσιαστικά να μπορώ να διπλασιάσω τον όρο $a + 0.75m(t)$ χωρίς να υπερδιαμορφώνω το σήμα, δηλαδή:

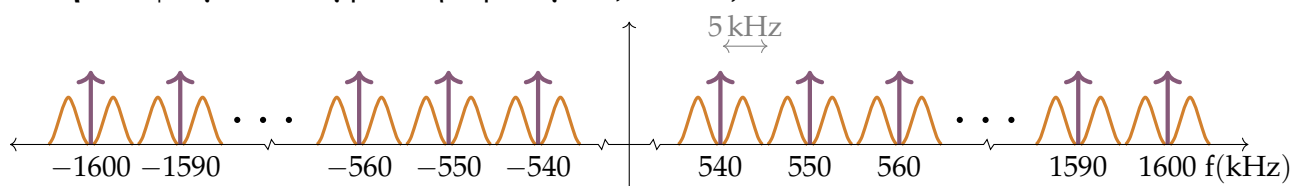
$$\begin{aligned} 1 + \frac{0.75}{a} \cdot m(t) &\geq 0.5 \\ \implies 1 + \frac{0.75}{a} \min [m(t)] &= 0.5 \\ \implies \boxed{a = 1.5} \end{aligned}$$

Παράδειγμα Έχουμε έναν ραδιοφωνικό σταθμό στα $f_c = 700$ kHz, και θέλουμε να τον **ετεροδυναώσουμε** στα $f_{IF} = 400$ kHz, δηλαδή να τον κατεβάσουμε στα 400 kHz προτού τον κατεβάσουμε στη βασική ζώνη.

Ποιά πρέπει να είναι συχνότητα f_{LO} του τοπικού ταλαντωτή;

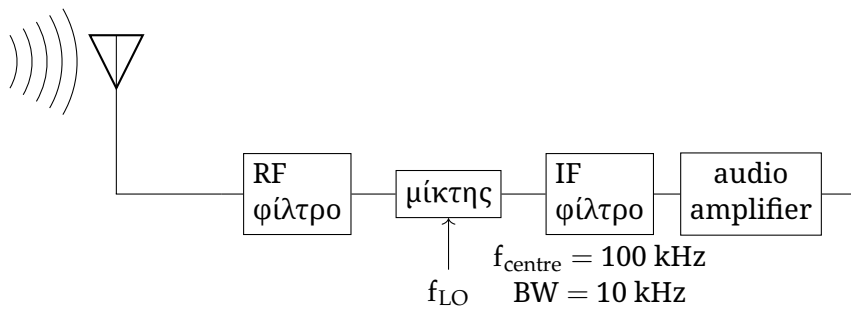
Η κεραία AM λαμβάνει ολόκληρη τη μπάνα των AM, δηλαδή $f \in [540, 1600]$ kHz.

Λύση Το φάσμα που λαμβάνει η κεραία μοιάζει κάπως έτσι:



Εμείς όμως θέλουμε να ακούσουμε μόνο το σταθμό στα 700 kHz.

Ο υπερετεροδυναός δέκτης μοιάζει κάπως έτσι:



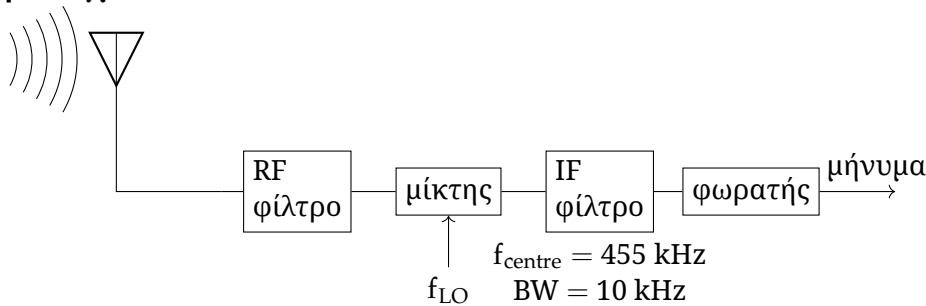
Στον μίκτη ουσιαστικά πολλαπλασιάζουμε με τη συχνότητα f_{LO} για να μετακινήσουμε το σήμα σε μια f_{IF} (Intermediate Frequency) που θα αποδιαμορφώσουμε αργότερα.

Οι συχνότητες με τις οποίες μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε το σήμα ώστε να μετακινηθεί είναι η $f_{LO} = 300$ kHz και $f_{LO} = 1100$ kHz, κάτι που μπορούμε να διαπιστώσουμε αν σκεφτούμε τη συνέλιξη των δύο εισόδων στη συχνότητα.

Όμως σε κάθε έναν από τους παραπάνω πολλαπλασιασμούς, προστίθενται επιπλέον συχνότητες-φάντασμα στα 400 kHz, από τα $f' = 100$ kHz και τα $f' = 1500$ kHz αντίστοιχα, τα οποία επηρεάζουν και προστίθενται στο επιθυμητό σήμα.

Εφ' όσον όμως στα 100 kHz δεν έχουμε σήμα, αφού το φίλτρο RF δεν το αφήνει να περάσει, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την τοπική συχνότητα των $f_{LO} = 300$ kHz για να ετεροδυνώσουμε το σήμα.

Παράδειγμα



Δίνεται ένας υπερετεροδύωνος δέκτης, όπου η κεραία λαμβάνει το φάσμα των AM ραδιοφωνικών σταθμών (540 - 1600 kHz) με εύρος ζώνης του καθενός 10 kHz.

Η κεντρική συχνότητα του RF φίλτρου ρυθμίζεται μαζί με την f_{LO} , και ισχύει:

$$f_{RF} = f_{LO} - 5 \text{ kHz}$$

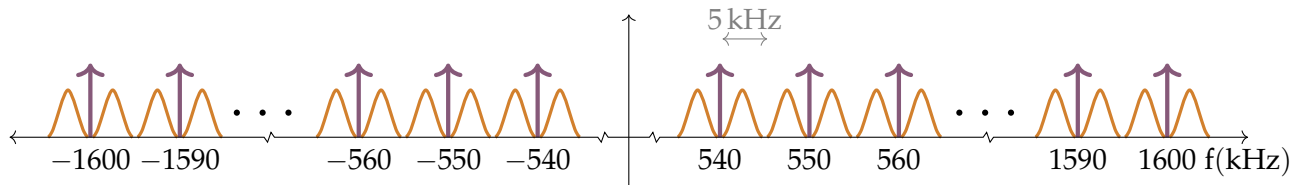
ενώ για τη συχνότητα f_c του σταθμού που θέλουμε να ακούσουμε ισχύει:

$$f_{LO} = f_c + 455 \text{ kHz}$$

- Ζωγραφίστε ποιοτικά το φάσμα στην είσοδο του RF φίλτρου.
- Δικαιολογήστε ότι αυτό επιτυγχάνεται εάν η συχνότητα f_{LO} του τοπικού ταλαντωτή παίρνει τιμές στο διάστημα [995, 2055] kHz. Συνοδεύστε την απάντησή σας με ένα παράδειγμα.
- Βρείτε το δεύτερο διάστημα τιμών στο οποίο μπορεί να κυμαίνεται η f_{LO} , ώστε να ετεροδυνώνεται στα 455 kHz.
- Υπολογίστε το λόγο της μέγιστης προς την ελάχιστη f_{LO} για καθένα από τα παραπάνω διαστήματα συχνοτήτων. Η επιλογή ποιού από τα δύο καταλήγει σε υλοποίηση του τοπικού ταλαντωτή τεχνοοικονομικά πιο συμφέρουσα; (Χωρίς να ληφθούν υπ' όψιν τυχόν είδωλα)
- Ποιό πρέπει να είναι το εύρος ζώνης του RF φίλτρου, ώστε αφενός να επιτρέπει τη διέλευση του σταθμού στην f_c , και αφετέρου να απορρίπτει αυτόν στη συχνότητα-είδωλο f'_c ; Απαντήστε για μια αριθμητική εφαρμογή των f_c και f'_c .

Λύση

(α)



(β) Έστω ότι συντονιζόμαστε στο σταθμό στα 540 kHz, που είναι ο πρώτος σταθμός. Τότε η έξοδος του μίκτη θα αποτελείται από δύο σήματα, με συχνότητες:

$$f_{\text{high}} = f_c + f_{\text{LO}} = 540 + 995 = 1535 \text{ kHz}$$

$$f_{\text{low}} = |f_c - f_{\text{LO}}| = |540 - 995| = 455 \text{ kHz}$$

Ο σχεδιαστής του υπερετερόδυνου δέκτη μπορεί, εφαρμόζοντας ένα band-pass φίλτρο, να επιλέξει ποιά από τις παραπάνω δύο συχνότητες θα χρησιμοποιήσει ως ενδιάμεση. Στη συγκεκριμένη άσκηση μας δίνεται η κεντρική συχνότητα του φίλτρου, η οποία είναι 455 kHz, επομένως επιλέγεται η f_{low} .

Αντίστοιχα, για τον τελευταίο σταθμό στην απέναντι άκρη του φάσματος (1600 kHz):

$$f_{\text{low}} = |f_c - f_{\text{LO}}| = |1600 - 2055| = 455 \text{ kHz}$$

που αντιστοιχεί πάλι στην επιλεγμένη τιμή του φίλτρου.

(γ) Θέλουμε να βρούμε ένα εύρος f_{LO} για το οποίο ο όρος $|f_c - f_{\text{LO}}|$ να είναι ίσος με $f_{\text{IF}} = 455 \text{ kHz}$. Ισχύει $540 \leq f_c \leq 1600$, άρα:

$$540 - f_{\text{LO}} \leq f_c - f_{\text{LO}} \leq 1600 - f_{\text{LO}}$$

Εφ' όσον στο (β) ερώτημα ο όρος $[f_c - f_{\text{LO}}]$ ήταν αρνητικός, τώρα θα υποθέσουμε ότι είναι θετικός, επομένως μπορούμε να τοποθετήσουμε άφοβα απόλυτη τιμή:

$$540 - f_{\text{LO}} \leq |f_c - f_{\text{LO}}| \leq 1600 - f_{\text{LO}} \implies 540 - f_{\text{LO}} \leq 455 \leq 1600 - f_{\text{LO}}$$

επομένως:

$$f_{\text{LO}} \in [85, 1145] \text{ kHz}$$

$$(δ) \frac{f_{\text{LO}_{\text{max}}}}{f_{\text{LO}_{\text{min}}}} = \frac{2055}{995} = 2.065$$

$$\frac{f_{\text{LO}_{\text{max}}}}{f_{\text{LO}_{\text{min}}}} = \frac{1145}{85} = 13.47$$

"Τεχνοοικονομικά πιο συμφέρουσα" σημαίνει ότι το κύκλωμα είναι πιο απλό για να υλοποιηθεί, με αποτέλεσμα να είναι πιο φθηνό.

Ουσιαστικά εδώ έχουμε ένα κύκλωμα που ταλαντώνεται σε μία συχνότητα. Είναι πιο δύσκολο να κατασκευάσουμε μία τέτοια διάταξη με μεγαλύτερο εύρος ζώνης, αφού απαιτούνται μεγαλύτεροι μεταβλητοί πυκνωτές. Άρα από αυτήν την άποψη είναι προτιμότερη η πρώτη επιλογή εύρους συχνοτήτων.

(ε) Έστω ότι συντονιζόμαστε στο σταθμό των 540 kHz. Τότε, σύμφωνα με τα παραπάνω, ο τοπικός ταλαντωτής συντονίζεται στη συχνότητα:

$$f_{\text{LO}} = f_c + 455 = 995 \text{ kHz}$$

Και η ενδιάμεση (IF) συχνότητα του υπερετερόδυνου, η οποία είναι η έξοδος του μίκτη, υπολογίζεται από τον τύπο:

$$f_{low} = |f_c - f_{LO}| = |540 - 995| = 995 \text{ kHz}$$

Όμως φαίνεται ότι η συχνότητα $f_c = 540 \text{ kHz}$ δεν είναι η μόνη που μπορεί να προκαλέσει έξοδο του μίκτη στα 995 kHz . Πράγματι, υπάρχει και μία άλλη συχνότητα f'_c , η οποία ονομάζεται **συχνότητα-είδωλο**, και αν εισέλθει ως **είσοδος στο μίκτη**, θα προστεθεί και αυτή στην έξοδο, παραμορφώνοντας το επιθυμητό σήμα.

Πράγματι:

$$f_{low} = |f'_c - f_{LO}| = 455 \implies 455 = |f'_c - 995| \implies \underline{f'_c = 1450 \text{ kHz}}$$

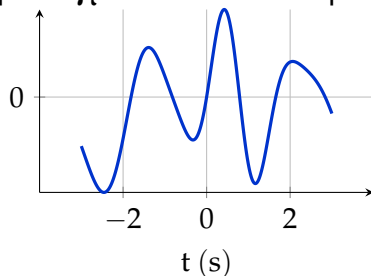
Αυτό σημαίνει πως ο σταθμός που βρίσκεται στα 1450 kHz θα παρεμβάλλεται στην έξοδό μας, αν και έχουμε συντονιστεί στο σταθμό στα $f_c = 540 \text{ kHz}$!

Αντίστοιχα, αν συντονιστούμε σε επόμενους σταθμούς, π.χ. $f_c = 600 \text{ kHz}$, προκύπτουν μεγαλύτερες συχνότητες-είδωλα. π.χ. $f'_c = 1510 \text{ kHz}$.

Για να διορθώσουμε αυτό το πρόβλημα, χρησιμοποιούμε ένα **band-pass φίλτρο** πριν την είσοδο του μίκτη, απαιτώντας να αποκόπτει τις συχνότητες-είδωλα πριν εισέλθουν σε αυτόν. Η προδιαγραφή αυτή δεν είναι δύσκολο να υλοποιηθεί, επομένως το φίλτρο αυτό είναι εύκολα υλοποιήσιμο.

Στο σταθμό των 540 kHz , το RF φίλτρο έχει κεντρική συχνότητα $f_{RF} = f_{LO} - 5 = f_c + 455 - 5 = 990 \text{ kHz}$. Θέλουμε αφήνει ανεπηρέαστο το σταθμό ($535 - 545 \text{ kHz}$, δηλαδή $990 - 535 = 455 \text{ kHz}$ κάτω από την κεντρική του συχνότητα), αλλά να **μην** επιτρέπει τη διέλευση του ειδώλου ($1445 - 1455 \text{ kHz}$, δηλαδή $1445 - 990 = 455 \text{ kHz}$ πάνω από την κεντρική συχνότητα του φίλτρου). Επομένως το εύρος ζώνης του φίλτρου πρέπει να είναι ακριβώς $2 \cdot 455 = 910 \text{ kHz}$ για να αφήνει το σήμα να περάσει, και όχι το είδωλο.

Παράδειγμα Δίνεται το παρακάτω διαμορφωμένο σήμα:

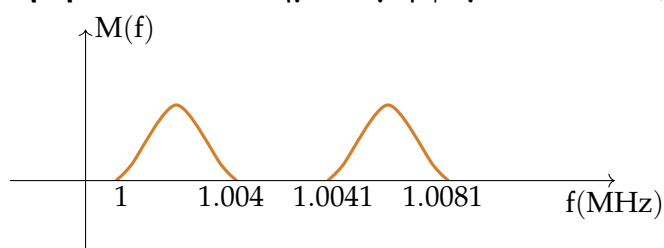


Να δείξετε (οπτικά) ότι είναι διαμορφωμένο και κατά πλάτος, και κατά φάση.

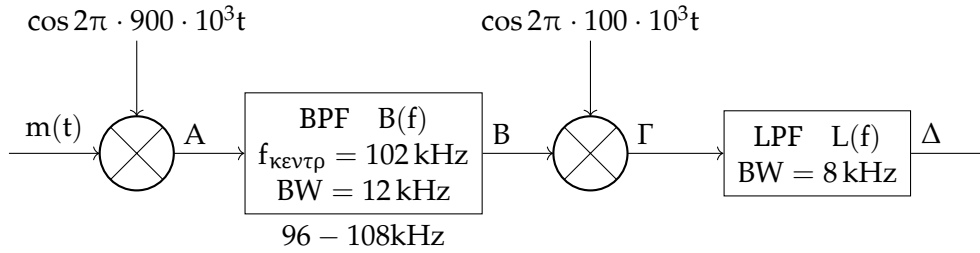
Λύση Παρατηρούμε ότι μεταβάλλεται και το πλάτος, και η συχνότητα του σήματος, επομένως είναι διαμόρφωση πλάτους και φάσης.

Αναλυτική λύση σημαίνει ότι λύνουμε την άσκηση προχωρώντας τους τύπους.

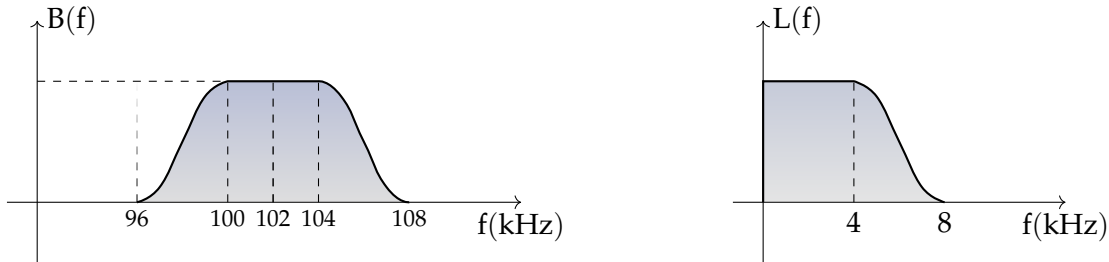
Άσκηση Δίνεται ένα σήμα διαμορφωμένο κατά USB, και πολυπλεγμένο στη συχνότητα:



Θέλουμε να το αποδιαμορφώσουμε ώστε να πάρουμε μόνο το ένα σήμα στη βασική ζώνη. Για αυτό χρησιμοποιούμε την παρακάτω διάταξη αποδιαμορφωτή:

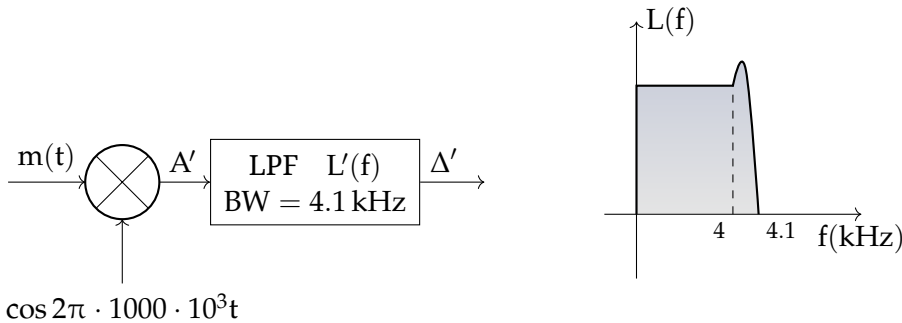


όπου δίνονται και οι αποκρίσεις $B(f)$ και $L(f)$ των φίλτρων:



(α) Να ζωγραφίσετε ποιοτικά τα φάσματα στα σημεία A, B, Γ και Δ.

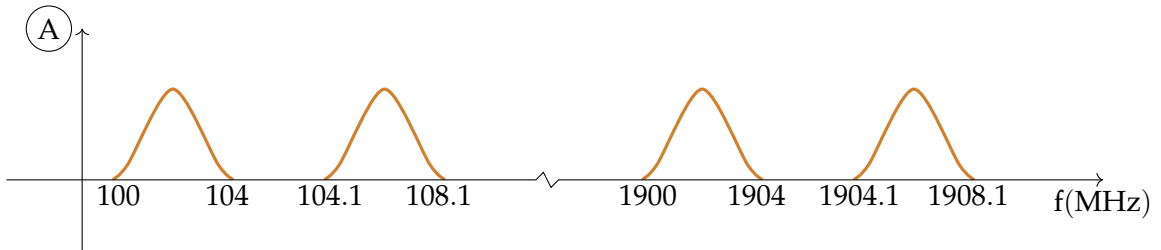
(β) Να ζωγραφίσετε τα φάσματα στα A' και Δ' μιας εναλλακτικής διάταξης διαμόρφωσης:



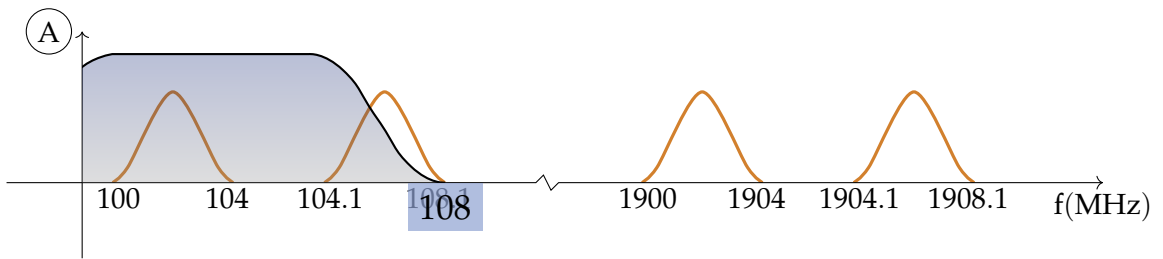
(γ) Να συγκρίνετε τα σήματα στα σημεία Δ και Δ', και να σχολιάσετε τι πλεονέκτημα τεχνοοικονομικής φύσης προσφέρει ο αποδιαμορφωτής δύο σταδίων (του 1^{ου} ερωτήματος) σε σχέση με τον αντίστοιχο του ενός.

Λύση

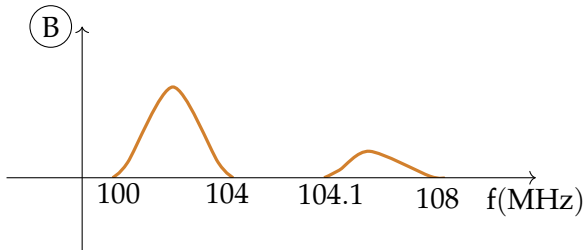
(α) • Στο σημείο A έχουμε πολλαπλασιασμό του σήματος με ένα ημίτονο 900 kHz, δηλαδή στη συχνότητα συνέλιξη του σήματος με δύο δέλτα. Επομένως ένα αντίγραφο του σήματος θα μετατοπιστεί κατά 900 kHz στα αριστερά, και ένα άλλο θα μετατοπιστεί στα δεξιά:



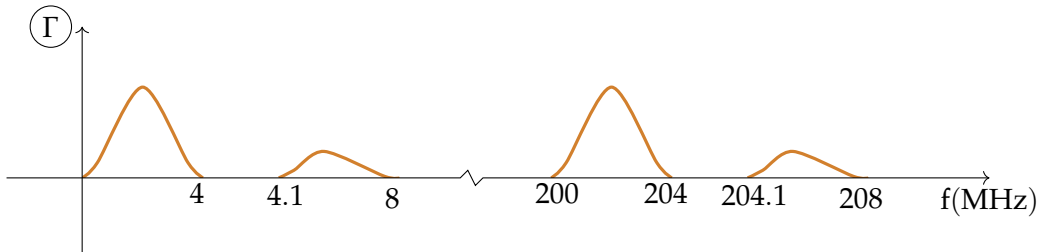
• Το σημείο B προκύπτει από το προηγούμενο σήμα, στο οποίο εφαρμόσαμε ένα φίλτρο:



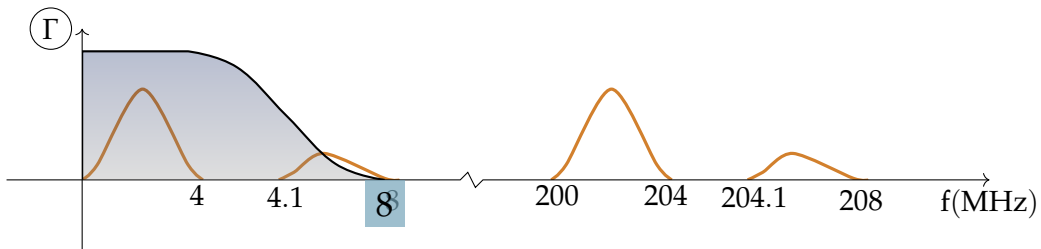
Δηλαδή το σήμα που προκύπτει είναι το πρώτο αριστερό σήμα, και το δεύτερο με μειωμένο πλάτος, ενώ οι συχνότητες από τα 1900 kHz και μετά θα έχουν αποκοπεί πλήρως από το φίλτρο:



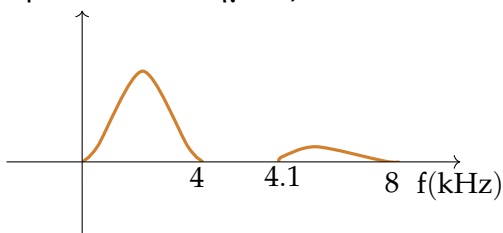
- Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε με ένα ημίτονο 100 kHz, άρα δύο αντίγραφα του σήματος στο B μετατοπίζονται στα αριστερά και στα δεξιά:



- Η απόκριση του χαμηλοπερατού φίλτρου εφαρμόζεται επάνω στο σήμα Γ:



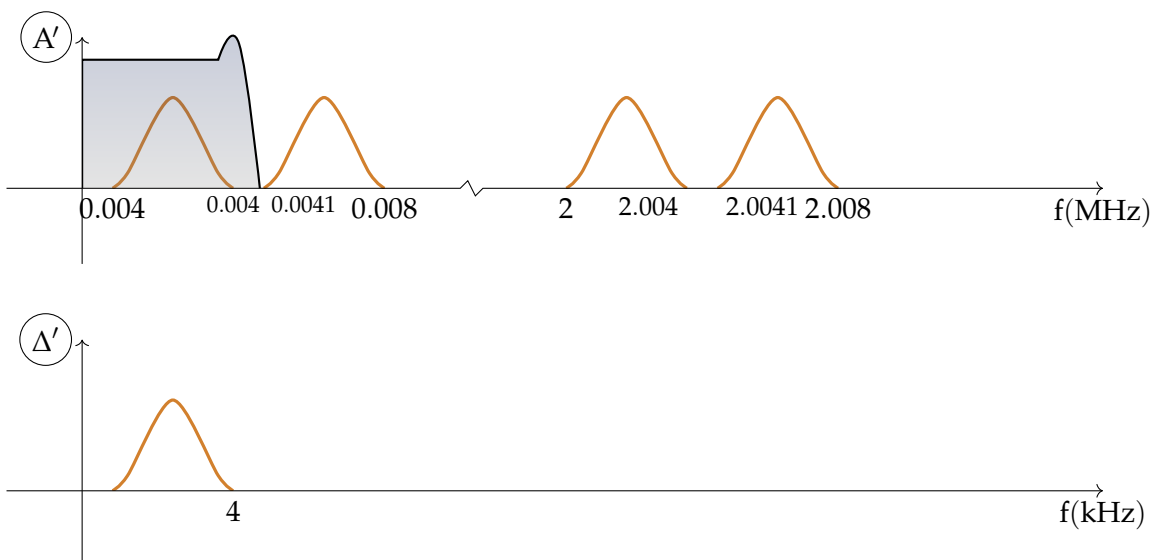
Άρα τελικά το σήμα εξόδου είναι:



Παρατηρούμε ότι στο τελικό σήμα δεν έχει κοπεί το δεύτερο κανάλι, αλλά έχει μόνο αποσβεστεί σε μεγάλο βαθμό.

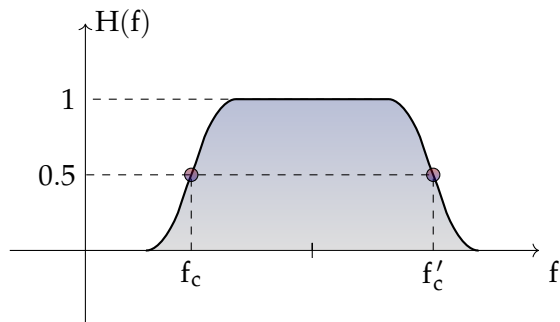
Σημειώνουμε ότι ο παραπάνω δέκτης είναι υπερετερόδυνος, αφού δεν κατεβάζει αμέσως το σήμα στην επιθυμητή συχνότητα, αλλά το φέρνει πρώτα σε μια ενδιάμεση.

(β) Αντίστοιχα με παραπάνω, έχουμε:



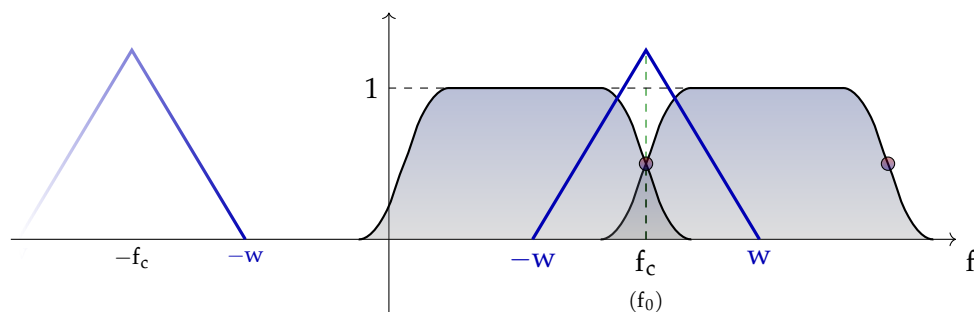
(γ) Ο ετερόδυνος αποδιαμορφωτής έχει πιο εύκολα υλοποιήσιμα φίλτρα, αφού η απόκρισή τους στη συχνότητα είναι πολύ λιγότερο απότομη σε σχέση με αυτήν του ομόδυνου, επομένως είναι πιο φθηνός. Από την άλλη μεριά, ο δεύτερος αποδιαμορφωτής δεν δίνει στην έξοδο το μη επιθυμητό σήμα, το οποίο μπορεί να εμφανιστεί ως θόρυβος σε έναν ακροατή.

Ερώτημα Αιτιολογήστε γιατί το παρακάτω φίλτρο φαίνεται ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για διαμόρφωση VSB:

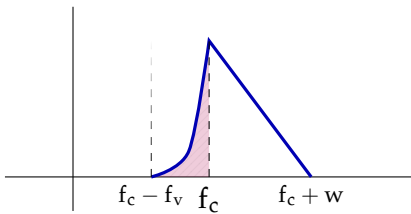


Λύση Το φίλτρο αυτό φαίνεται ότι έχει περιττή συμμετρία γύρω από τα κεντρικά σημεία των ζωνών καθόδου, f_0 και f'_0 .

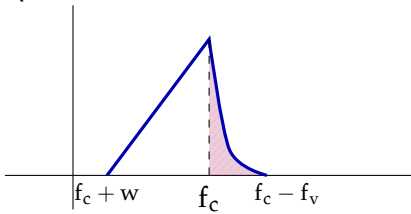
Για να σχηματίσουμε ένα VSB σήμα, θυμόμαστε ότι πρώτα σχεδιάζουμε ένα DSB (διπλής πλευρικής ζώνης), και σε αυτό εφαρμόζουμε το παραπάνω φίλτρο, τοποθετώντας τη συχνότητα φέροντος f_c επάνω στην κεντρική f_0 ή f'_0 του φίλτρου.



Και μετά την εφαρμογή του φίλτρου προκύπτει:



όπου είναι κατάλοιπη η κάτω πλευρική ζώνη, ή, αν έχουμε ως κατάλοιπη την επάνω πλευρική ζώνη:



Τα σημεία f_0 του φίλτρου είναι τα:

$$\left(H^{-1}(0.5), 0.5 \right)$$

όπου H^{-1} η αντίστροφη συνάρτηση της απόκρισης του φίλτρου. Για το VSB χρειάζεται:

$$f_c = H^{-1}(0.5)$$

Για να μπορεί να διαμορφωθεί και να αποδιαμορφωθεί το VSB σήμα, πρέπει να έχουμε **περιττή συμμετρία** γύρω από τα σημεία f_0 του φίλτρου. Εποπτικά, αν περιστρέψουμε τη ζώνη μετάβασης γύρω από το f_0 κατά 180° , θα πρέπει να καταλήγουμε στο ίδιο σχήμα.

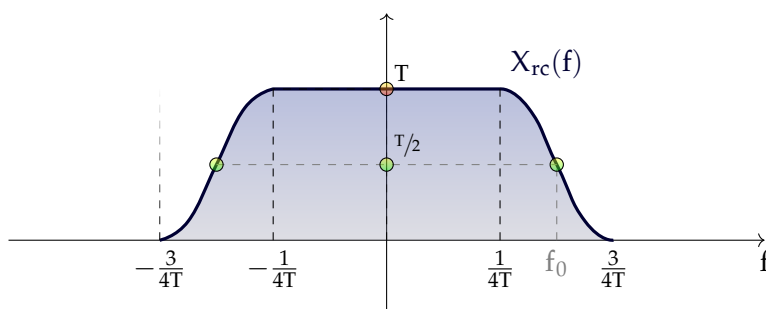
Άσκηση (Παλμός Ανυψωμένου Συνημιτόνου) Οι παλμοί ανυψωμένου συνημιτόνου χρησιμοποιούνται στις ψηφιακές τηλεπικοινωνίες. Έχουν το εξής ενδιαφέρον φάσημα:

$$X_{rc}(f) = \begin{cases} T, & |f| \leq \frac{1}{4T} \\ \frac{T}{2} \left[1 + \cos 2\pi T \left(|f| - \frac{1}{4T} \right) \right], & \frac{1}{4T} \leq |f| \leq \frac{3}{4T} \\ 0, & |f| > \frac{3}{4T} \end{cases}$$

- Να σχεδιαστεί το φάσμα $X_{rc}(f)$
- Να δείξετε αναλυτικά ότι μια τέτοια συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να χρησιμοποιηθεί για VSB διαμόρφωση.
- Να σχεδιάσετε πώς θα έμοιαζε το φίλτρο σε υψηλότερες συχνότητες.
- Ποιά συχνότητα στο διάστημα $\left[f_1 - \frac{3}{4T}, f_1 + \frac{3}{4T} \right]$ θα επιλέγατε για να βάλετε το κέντρο του DSB σήματος ώστε μετά την εφαρμογή του φίλτρου να γίνει DSB, και ποιά θα ήταν τότε η κατάλοιπη πλευρική ζώνη;

Λύση

(α)



(β) Αφού το φίλτρο είναι στη βασική ζώνη και έχουμε συμμετρία γύρω από το 0, θα εξετάσουμε μόνο το άνω σκέλος (και όχι και το κάτω), προσπαθώντας να αποδείξουμε ότι έχει περιττή συμμετρία γύρω από κάποιο κεντρικό σημείο.

Το σημείο στο κέντρο της ζώνης μετάβασης του φίλτρου είναι αυτό με τεταγμένη $\frac{T}{2}$, και ορίζουμε την τεταγμένη του να είναι f_0 , δηλαδή:

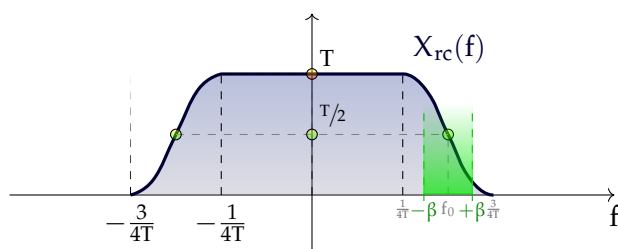
$$f_0 = X_{rc}^{-1}\left(\frac{T}{2}\right), \quad f \geq 0$$

Πρώτα πρέπει να βρούμε την τιμή του f_0 , δηλαδή την τιμή του f για την οποία $X_{rc}(f) = 0$:

$$\begin{aligned} X_{rc}(f) &= \frac{T}{2} \implies \\ \frac{T}{2} \left[1 + \cos 2\pi T \left(f - \frac{1}{4T} \right) \right] &= \frac{T}{2} \implies \\ 1 + \cos 2\pi T \left(f - \frac{1}{4T} \right) &= 1 \implies \\ \cos 2\pi T \left(f - \frac{1}{4T} \right) &= 0 \implies \\ 2\pi T \left(f - \frac{1}{4T} \right) &= \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots \implies \\ f &= \frac{1}{2T}, \frac{1}{T}, \frac{3}{2T}, \dots \end{aligned}$$

Από τις παραπάνω τιμές επιλέγουμε αυτήν που είναι εντός του διαστήματος $\left(\frac{1}{4T}, \frac{3}{4T}\right)$, δηλαδή την $\frac{1}{2T}$, η οποία μάλιστα βρίσκεται στο κέντρο του διαστήματος αυτού.

Για να αποδείξουμε την περιττή συμμετρία γύρω από αυτό το σημείο, πρώτα ορίζουμε ένα $\beta \in [0, \frac{1}{4T}]$, που είναι η απόσταση από το σημείο $\frac{1}{2T}$.



Τότε:

- Δεξιά του f_0 , πηγαίνουμε στο σημείο $f_0 + \beta = \frac{1}{2T} + \beta$, και έχουμε:

$$\begin{aligned} X_{rc}\left(\frac{1}{2T} + \beta\right) &= \frac{T}{2} \left[1 + \cos 2\pi T \left(\frac{1}{2T} + \beta - \frac{1}{4T} \right) \right] \\ &= \frac{T}{2} \left[1 + \cos 2\pi T \left(\beta + \frac{1}{4T} \right) \right] \end{aligned}$$

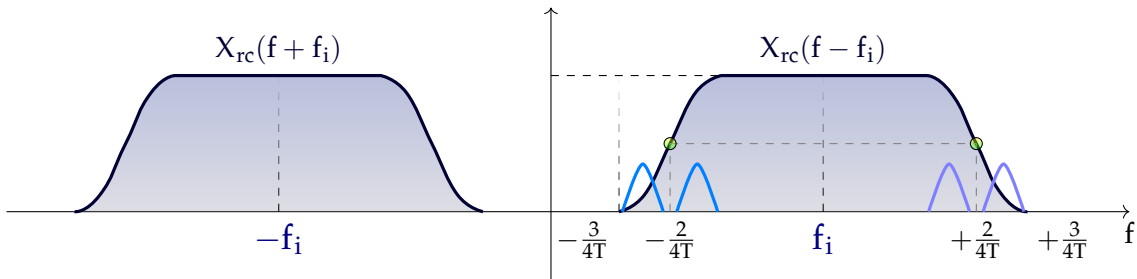
- Αριστερά του f_0 , πηγαίνουμε στο σημείο $f_0 - \beta = \frac{1}{2T} - \beta$, και έχουμε:

$$X_{rc}\left(\frac{1}{2T} - \beta\right) = \frac{T}{2} \left[1 + \cos 2\pi T \left(\frac{1}{4T} - \beta \right) \right]$$

Για να έχουμε περιττή συμμετρία, θα πρέπει οι παραπάνω όροι να δίνουν σταθερό άθροισμα T :

$$\begin{aligned}
 X_{rc}\left(\frac{1}{2T} + \beta\right) + X_{rc}\left(\frac{1}{2T} - \beta\right) &= T + \frac{T}{2} \left(\cos 2\pi T \left(\beta + \frac{1}{4T} \right) + \cos 2\pi T \left(\frac{1}{4T} - \beta \right) \right) \\
 \text{από τριγ. ταυτότητα} &= T + \frac{T}{2} \cdot 2 \cdot \cos 2\pi T \cdot \frac{1}{4T} \cdot \cos 2\pi T \beta \\
 &= T.
 \end{aligned}$$

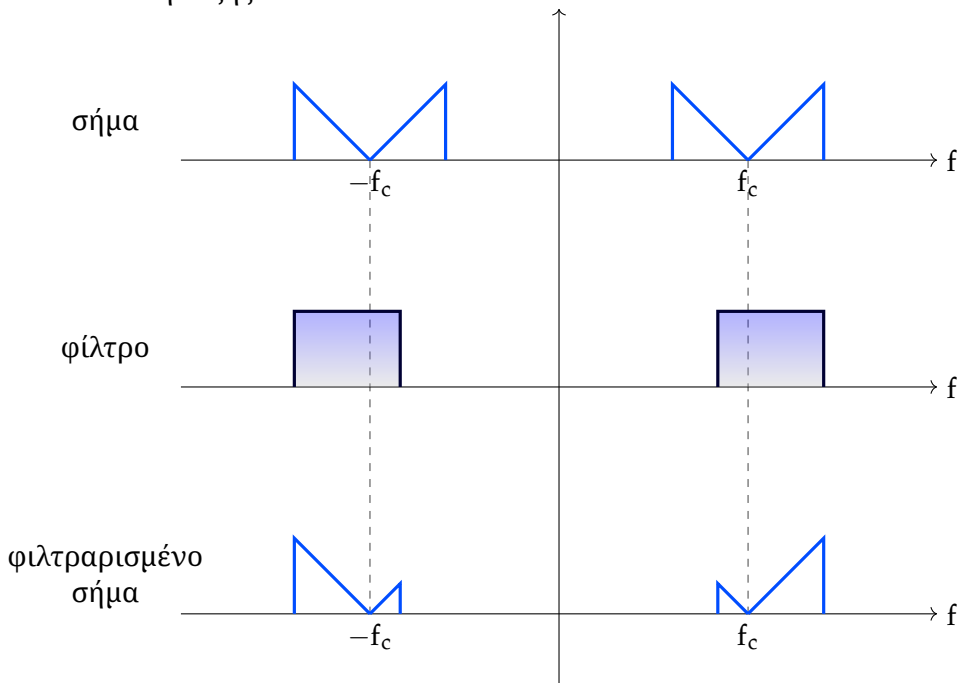
(γ) Θα μετατοπίσουμε αριστερά και δεξιά την απόκριση συχνότητας του φίλτρου:



(δ) Σε προηγούμενο ερώτημα είδαμε ότι η κεντρική συχνότητα f_0 της ζώνης μετάβασης (στη βασική ζώνη) είναι $f_0 = \frac{1}{2T}$. Επομένως, στις υψηλές συχνότητες μπορούμε να κεντράρουμε το σήμα στη συχνότητα $f_c = f_i + \frac{1}{2T}$, και να αφήσουμε κατάλοιπη την επάνω πλευρική ζώνη.

Εναλλακτικά, μπορούμε να κεντράρουμε στην $f_c = f_i - \frac{1}{2T}$ και να είναι κατάλοιπη η κάτω πλευρική ζώνη.

Άσκηση Αναζητώντας περισσότερες πληροφορίες για την διαμόρφωση DSB σημάτων, βρήκατε στο διαδίκτυο την εξής εικόνα:

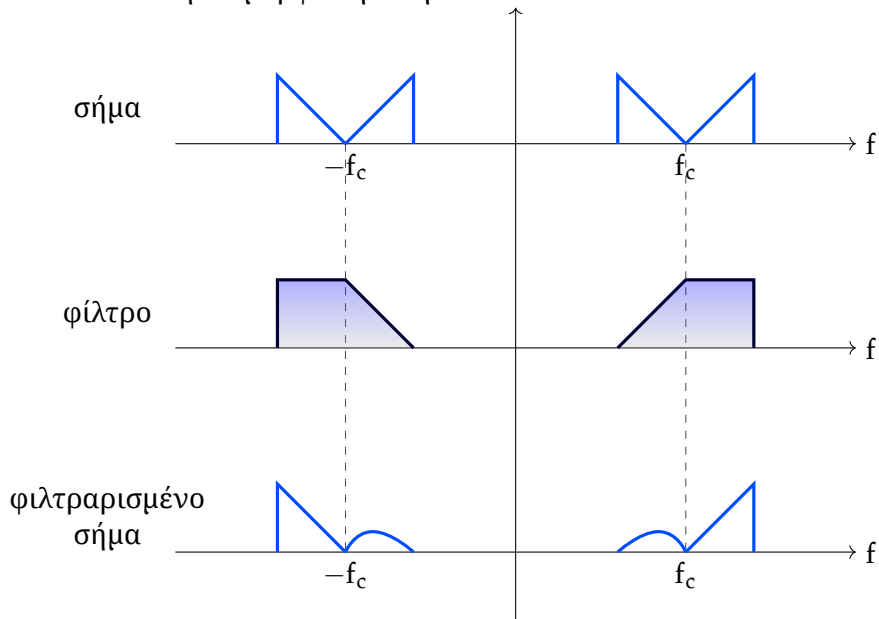


Το σχήμα αυτό παρουσιάζει ένα αρχικό σήμα κατά DSB, ένα φίλτρο από το οποίο το περνάμε, και το τελικό σήμα μετά το φίλτρο. Ο σκοπός της διαδικασίας αυτής είναι να διαμορφώσουμε το σήμα κατά VSB.

Βρείτε το λάθος του παραπάνω σχήματος, και επιλέξτε ένα φίλτρο το οποίο να μπορεί να διαμορφώσει σωστά το σήμα. Σχεδιάστε το σωστά διαμορφωμένο σήμα.

Λύση Το φίλτρο που παρουσιάζεται παρατηρούμε ότι δεν παρουσιάζει περιττή συμμετρία ως προς το κέντρο της ζώνης μετάβασης, επομένως δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν VSB φίλτρο.

Μία πιο σωστή διαμόρφωση θα ήταν:



Κεφάλαιο 3 Διαμόρφωση Γωνίας

Μέχρι στιγμής ασχοληθήκαμε με διαμορφώσεις πλάτους, που μετέβαλλαν μόνο το πλάτος του σήματος (ίσως και τη φάση με κάποιον τρόπο, όπως εξηγήσαμε σε μια εφαρμογή).

Τώρα θα μελετήσουμε συστήματα στα οποία μεταβάλλουμε τη συχνότητα ή τη φάση του εκπεμπόμενου σήματος (αργότερα θα δούμε ότι αυτά τα δύο είναι ισοδύναμα), διατηρώντας το πλάτος σταθερό:

$$A_c \cos(\underbrace{2\pi f_c t + \vartheta}_{\theta(t)})$$

Η διαμόρφωση αυτή ονομάζεται **Phase Modulation (PM)** ή **Frequency Modulation (FM)**, εμφανίστηκε το 1930, και άρχισε να χρησιμοποιείται για broadcasting το 1960-1970. Έχει το πλεονέκτημα ότι, παρ' όλο που απαιτεί ένα πιο ακριβό και πολύπλοκο σύστημα, έχει καλύτερη ποιότητα πληροφορίας, επειδή δεν επηρεάζεται από τον θόρυβο όσο επηρεάζονται και τα AM.

3.1 Βασικοί ορισμοί

Εστω ένα σήμα:

$$s(t) = A_c \cos \underbrace{2\pi f_c t}_{\theta(t)}$$

Τότε από παραπάνω προκύπτει ότι η συχνότητα είναι:

$$f_c = \frac{\theta(t)}{2\pi t} = \frac{\omega_c}{2\pi}$$

δηλαδή ο αριθμός των κύκλων που πραγματοποιεί το συνημίτονο μέσα στην μονάδα του χρόνου:

$$f_c = \frac{\theta(t+dt) - \theta(t)}{2\pi dt}$$

Ορισμός 3.1: Στιγμιαία συχνότητα

Για ένα σήμα $s(t) = A_c \cos(\theta_i(t))$ με **στιγμιαία φάση** $\theta_i(t)$ ορίζουμε τη **μέση συχνότητα**:

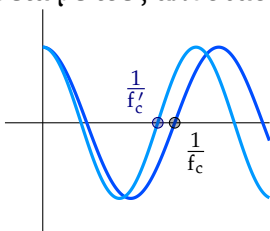
$$f_{\Delta t}(t) = \frac{\theta_i(t + \Delta t) - \theta_i(t)}{2\pi \Delta t}$$

και παίρνοντας το όριο του Δt στο 0, ορίζουμε τη **στιγμιαία συχνότητα**:

$$f_i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} f_{\Delta t}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta_i(t + \Delta t) - \theta_i(t)}{2\pi \Delta t} \implies$$

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta_i(t)}{dt}$$

Έτσι, μπορούμε να έχουμε ένα σήμα σταθερής ή μεταβαλλόμενης συχνότητας. Πρακτικά, μια μεταβαλλόμενη συχνότητα σημαίνει ότι το συνημίτονο δεν θα συναντάει τον οριζόντιο άξονα σε σημεία με ίσες αποστάσεις μεταξύ τους, αλλά σε διαφορετικές.



3.1.1 Διαμορφώσεις PM & AM

Τώρα μπορούμε να δώσουμε τις μαθηματικές εκφράσεις για τις διαμορφώσεις φάσης και συχνότητας:

Ορισμός 3.2: PM - Διαμόρφωση Φάσης

Ορίζουμε ως εξής τη **διαμόρφωση φάσης**:

$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + k_p m(t)$$

όπου το k_p είναι μια σταθερά που μετριέται π.χ σε rad/V.

Δηλαδή το σήμα μας είναι της μορφής:

$$s(t) = A_c \cos \left[2\pi f_c t + k_p m(t) \right]$$

Η διαμόρφωση φάσης οδηγεί στη μαθηματική έκφραση και της στιγμιαίας συχνότητας:

$$f_i(t) = f_c + \frac{k_p}{2\pi} \frac{dm(t)}{dt}$$

Ορισμός 3.3: FM - Διαμόρφωση Συχνότητας

Ορίζουμε ως εξής τη **διαμόρφωση συχνότητας**:

$$f_i(t) = f_c + k_f m(t)$$

όπου το k_f είναι μια σταθερά που μετριέται π.χ σε Hz/V.

Για να υπολογίσουμε το σήμα, έχουμε, από τη σχέση $f_i(t) = \frac{d\theta_i(t)}{2\pi dt}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta_i(t)}{dt} &= f_c + k_f m(t) \implies \\ \theta_i(t) &= 2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Άρα το σήμα μας είναι:

$$s(t) = A_c \cos \left[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right]$$

3.1.2 Ισχύς

Θυμόμαστε από προηγούμενο κεφάλαιο ότι η ισχύς ενός σήματος είναι:

$$P_w = \frac{1}{2} A_c^2$$

Αφού έχουμε σταθερό πλάτος, η ισχύς αυτή παραμένει σταθερή, και γενικά για τις διαμορφώσεις γωνίας είναι μικρή.

Επίσης, επισημαίνουμε ότι οι διαμορφώσεις γωνίας δεν είναι γραμμικές. Πράγματι, αν έχουμε δύο σήματα $m_1(t) + m_2(t)$ που θέλουμε να προσθέσουμε και να διαμορφώσουμε κατά PM:

$$m(t) = m_1(t) + m_2(t)$$

$$s_1(t) = A_c \cos [2\pi f_c t + k_p m_1(t)]$$

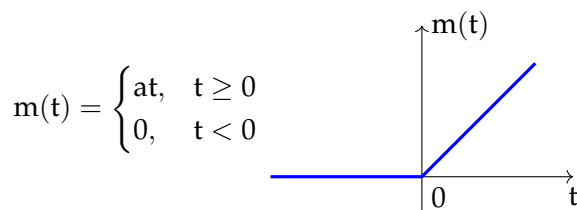
$$s_2(t) = A_c \cos [2\pi f_c t + k_p m_2(t)]$$

$$s(t) = A_c \cos [2\pi f_c t + k_p (m_1(t) + m_2(t))]$$

$$s(t) \neq s_1(t) + s_2(t), \quad \text{δηλαδή δεν ισχύει η συνθήκη γραμμικότητας.}$$

Η έλλειψη γραμμικότητας αυτή οδηγεί στο άπλωμα του PM/FM διαμορφωμένου σήματος στο φάσμα. Για αυτόν το λόγο οι ραδιοφωνικοί σταθμοί FM βρίσκονται σε υψηλότερες συχνότητες (88-108 MHz) από τους αντίστοιχους στα AM.

Ένα παράδειγμα Έστω ότι θέλουμε να στείλουμε ένα σήμα:



με συχνότητα φέροντος $f_c = \frac{1}{4}$ Hz, πρώτα με διαμόρφωση φάσης με $k_p = \frac{\pi}{2}$ rad/V, και μετά με διαμόρφωση συχνότητας με $k_f = 1$ Hz/V.

Με διαμόρφωση φάσης Έχουμε:

$$s(t) = \begin{cases} A_c \cos(2\pi f_c t + k_p at), & t \geq 0 \\ A_c \cos(2\pi f_c t), & t < 0 \end{cases} = \begin{cases} A_c \cos(\pi t) & t \geq 0 \\ A_c \cos(\pi t/2) & t < 0 \end{cases}$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η συχνότητα του σήματος μετά το 0 είναι διπλάσια από αυτήν πριν το 0. Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τα σημεία στα οποία μηδενίζεται η συνάρτηση δεξιά του 0, έχουμε $2\pi f_c t_n + k_p at_n = \frac{\pi}{2} + n\pi \implies t_n = \frac{1}{2} + n$.

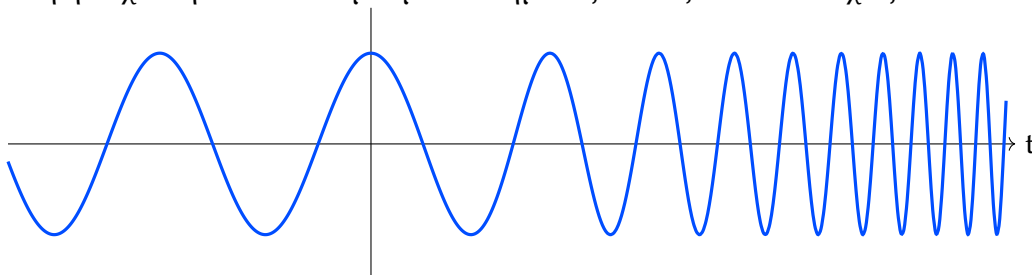
Με διαμόρφωση συχνότητας Έχουμε:

$$s(t) = \begin{cases} A_c \cos(2\pi f_c t + \pi k_f at^2), & t \geq 0 \\ A_c \cos(2\pi f_c t), & t < 0 \end{cases} = \begin{cases} A_c \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi t^2\right) & t \geq 0 \\ A_c \cos(\pi t/2) & t < 0 \end{cases}$$

Μάλιστα, δεξιά του 0, η στιγμιαία συχνότητα θα είναι:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + 2t\right)$$

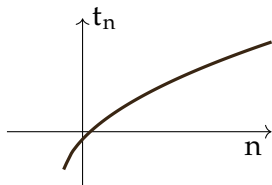
δηλαδή η συχνότητα του εκπεμπόμενου σήματος θα αυξάνεται συνεχώς:



Αντίστοιχα, αν θέλουμε να υπολογίσουμε τα σημεία στα οποία περνάμε από το 0, θέλουμε:

$$2\pi f_c t_n + \pi k_f a t_n^2 = \frac{\pi}{2} + n\pi \implies$$

$$t_n^2 + \frac{1}{2} t_n - n - \frac{1}{2} = 0 \implies t_n = \frac{1}{4} \left(-1 + \sqrt{9 + 16n} \right)$$



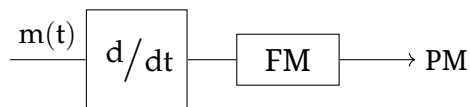
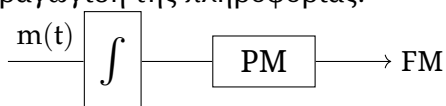
3.1.3 Δυναδικότητα των διαμορφώσεων

Οι τύποι του PM και FM είναι, όπως είδαμε παραπάνω:

$$\text{PM: } A_c \cos \left[2\pi f_c t + k_p m(t) \right]$$

$$\text{FM: } A_c \cos \left[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right]$$

Παρατηρούμε ότι ουσιαστικά οι διαμορφωτές FM και PM διαφέρουν μόνο κατά μία ολοκλήρωση ή παραγωγή της πληροφορίας:



Δηλαδή αν στην είσοδο ενός διαμορφωτή PM βάλουμε ένα ολοκληρωμένο σήμα, θα πάρουμε FM. Αν στην είσοδο ενός διαμορφωτή FM βάλουμε ένα σήμα που έχει παραγωγιστεί, θα πάρουμε PM. Επομένως, μπορούμε να αναλύσουμε μόνο το FM σήμα, αντί να πραγματοποιούμε ξεχωριστή ανάλυση για τα δύο είδη διαμορφώσεων.

3.2 FM

Η διαμόρφωση του FM, όπως είδαμε παραπάνω, είναι:

$$s(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\lambda) d\lambda)$$

Αν θεωρήσουμε ότι έχουμε ημιτονοειδές σήμα εισόδου με συχνότητα f_m :

$$m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$$

τότε η στιγμιαία συχνότητα είναι:

$$f_i(t) = f_c + k_f A_m \cos(2\pi f_m t)$$

$$= f_c + \Delta f \cos(2\pi f_m t) \quad \text{όπου } \Delta f = k_f A_m$$

Ορισμός 3.4: Μέγιστη απόκλιση συχνότητας

Ορίζουμε το:

$$\Delta f = k_f A_m$$

ως τη **μέγιστη απόκλιση συχνότητας**, η οποία φαίνεται ότι εξαρτάται μόνο από το πλάτος του σήματος.

Θυμόμαστε τον ορισμό της στιγμιαίας συχνότητας:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d\theta_i(t)}{dt} = f_i(t) \implies \theta_i = 2\pi \int_0^t f_i(t) dt$$

Άρα, για ημιτονοειδές σήμα, η φάση προκύπτει:

$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + \frac{\Delta f f_m}{\sin 2\pi f_m t}$$

και το διαμορφωμένο FM σήμα είναι:

$$s_{FM}(t) = A_c \cos \left[2\pi f_c t + \frac{\Delta f}{f_m} \sin 2\pi f_m t \right]$$

Ορισμός 3.5: Δείκτης διαμόρφωσης

Ορίζουμε τον **δείκτη διαμόρφωσης** β (modulation index) ως εξής:

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{A_m k_f}{f_m}$$

Ο δείκτης διαμόρφωσης στην ουσία εκφράζει την **απόκλιση φάσης**.

Άρα η **τελική έκφραση** της διαμόρφωσης FM είναι:

$$s_{FM}(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \beta \sin 2\pi f_m t)$$

Τυπικοί δείκτες διαμόρφωσης είναι $1 \leq \beta \leq 20$, και όπως θα δούμε αργότερα, το β επηρεάζει το εύρος ζώνης του εκπεμπόμενου σήματος. Για μεγάλα β έχουμε FM ευρείας ζώνης, ενώ για μικρά β (π.χ 0.5 ή 0.3) έχουμε FM στενής ζώνης (Narrow Band FM – NBFM).

Αντίστοιχα, για το PM ισχύει:

$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + A_m k_p \cos 2\pi f_m t$$

$$\beta_P = k_p A_m$$

$$f_i(t) = f_c - \frac{k_p A_m f_c}{2\pi} \sin 2\pi f_m t$$

$$s_{PM}(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \underbrace{A_m k_p \beta_P}_{\beta_P} \cos 2\pi f_m t)$$

3.2.1 NBFM

Αν αναλύσουμε τον τύπο του διαμορφωμένου σήματος FM, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} s(t) &= A_c \cos [2\pi f_c t + \beta \sin 2\pi f_m t] \\ &= A_c \cos 2\pi f_c t \cos(\beta \sin 2\pi f_m t) - A_c \sin(2\pi f_c t) \sin(\beta \sin 2\pi f_m t) \end{aligned}$$

Όταν για το β ισχύει $\beta \ll 1$ rad, τότε λέμε ότι έχουμε FM στενής ζώνης (**Narrow Band FM – NBFM**). Πρακτικά αυτό συμβαίνει όταν το β είναι μικρότερο του 0.3, ή ακόμα και του 0.5.

Τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τις προσεγγίσεις:

$$\begin{aligned} \cos [\beta \sin 2\pi f_m t] &\simeq 1 \\ \sin [\beta \sin 2\pi f_m t] &\simeq \beta \sin 2\pi f_m t \end{aligned}$$

Άρα προσεγγιστικά ισχύει:

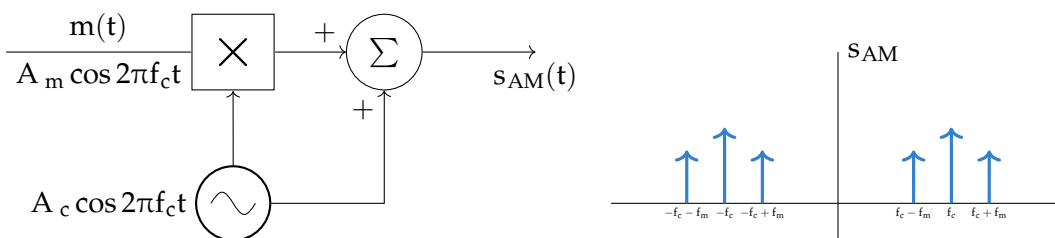
$$\begin{aligned} s(t) &\simeq A_c \cos 2\pi f_c t - \beta A_c \sin(2\pi f_m t) \sin(2\pi f_c t) \\ &= A_c \cos 2\pi f_c t + \frac{1}{2} \beta A_c [\cos 2\pi(f_c + f_m)t - \cos 2\pi(f_c - f_m)t] \end{aligned}$$

Η παραπάνω έκφραση όμως μοιάζει με ένα σήμα διαμορφωμένο κατά AM. Πράγματι, γενικά για τα AM σήματα ισχύει:

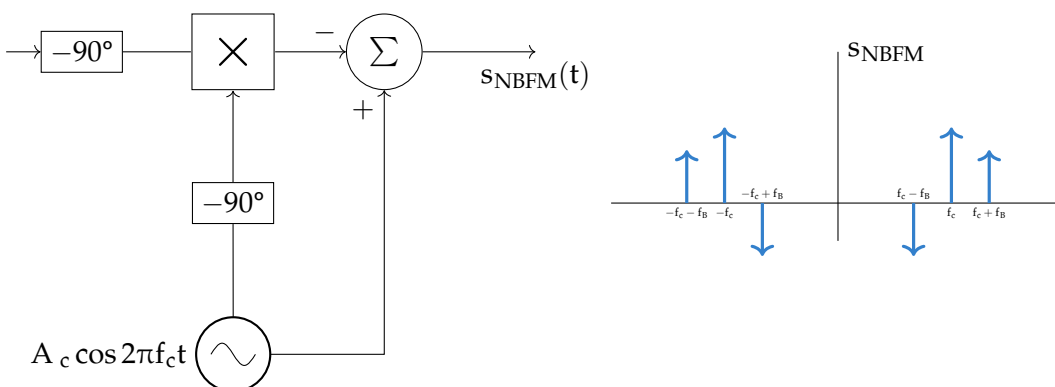
$$\begin{aligned} s_{AM}(t) &= A_c (1 + \mu \cos 2\pi f_m t) \cos 2\pi f_c t \\ &= A_c \cos 2\pi f_c t + \mu A_c \cos 2\pi f_m t \cos 2\pi f_c t \\ &= A_c \cos 2\pi f_c t + \frac{1}{2} \mu A_c [\cos 2\pi(f_c + f_m)t + \cos 2\pi(f_c - f_m)t] \end{aligned}$$

Τα δύο σήματα φαίνονται παρόμοια, και μπορούμε να συγκρίνουμε τις υλοποιήσεις του διαμορφωτή και τα φάσματα εξόδου:

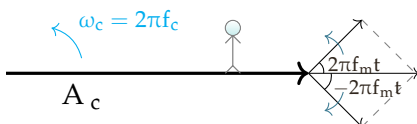
AM



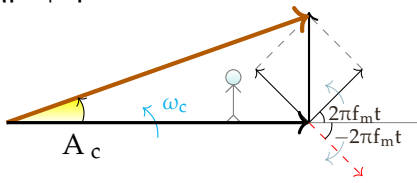
NBPM



Αν παραστήσουμε την έκφραση του AM σε μορφή φασιθετών, θα έχουμε ένα διάνυσμα A_c που περιστρέφεται με ταχύτητα $\omega_c = 2\pi f_c$, και στο τέλος του μπορούμε να προσθέσουμε τα δύο διανύσματα που περιστρέφονται με ταχύτητες $2\pi(f_c + f_m)$ και $2\pi(f_c - f_m)$. Το πρώτο περιστρέφεται πιο γρήγορα από το ω_c , και το δεύτερο πιο αργά. Όμως η συνιστώσα τους είναι προς την κατεύθυνση του A_c , και το πλάτος της αυξάνεται και μειώνεται ημιτονοειδώς:



Αντίστοιχα, για το NBFM μπορούμε να πραγματοποιήσουμε μια παρόμοια ανάλυση, φροντίζοντας ώστε να αλλάξουμε την κατεύθυνση του διανύσματος με γωνία $-2\pi f_m t$, αφού έχει αρνητικό πρόσημο. Τελικά θα πάρουμε ως άθροισμα ένα διάνυσμα με μία ελαφριά διαφορά γωνίας από αυτήν του A_c , δηλαδή θα "τρεμοπαίζει" συνεχώς στο χρόνο. Αυτό το τρεμόπαιγμα περιέχει και την πληροφορία.



3.2.2 Στο φάσμα της συχνότητας

Έστω ότι έχουμε ένα απλό ημιτονοειδές σήμα πληροφορίας:

$$m(t) = A_m \cos 2\pi f_m t$$

και το διαμορφωμένο κατά FM:

$$s(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \beta \sin 2\pi f_m t)$$

Το παραπάνω σήμα εν γένει δεν είναι περιοδικό: Η συχνότητα του φέροντος f_c δημιουργεί μία περίοδο $\frac{1}{T_c}$, και η συχνότητα f_m δημιουργεί μια περίοδο $\frac{1}{T_m}$. Αν οι δύο περίοδοι είναι ρητά πολλαπλάσια μεταξύ τους, τότε θα έχουμε μια αρκετά μεγάλη περίοδο, διαφορετικά το σήμα δεν θα είναι καθόλου περιοδικό.

Επομένως δεν είναι εύκολο να λάβουμε τη σειρά ή και το μετασχηματισμό Fourier του σήματος αυτού. Για αυτό το λόγο καταφεύγουμε στο ακόλουθο τέχνασμα.

Ορισμός 3.6: Μιγαδική μορφή FM σήματος

$$\begin{aligned} s(t) &= \text{Re} [A_c \exp(j2\pi f_c t + j\beta \sin 2\pi f_m t)] \\ &= \text{Re} [A_c \cdot \exp(j\beta \sin 2\pi f_m t) \cdot \exp(j2\pi f_c t)] \\ &= \text{Re} [\tilde{s}(t) \exp(j2\pi f_c t)] \end{aligned}$$

όπου ορίσαμε τη **μιγαδική περιβάλλουσα** $\tilde{s}(t)$ ως εξής:

$$\tilde{s}(t) = A_c \exp [j\beta \sin(2\pi f_m t)]$$

Η περιβάλλουσα αυτή έχει μία περίοδο f_m , οπότε και μία σειρά Fourier:

$$\tilde{s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j2\pi n f_m t)$$

όπου (από τη θεωρία των σειρών Fourier):

$$\begin{aligned} c_n &= f_m \int_{-1/2f_m}^{1/2f_m} s(t) \cdot \exp(-j2\pi n f_m t) dt \\ c_n &= f_m A_c \int_{-1/2f_m}^{1/2f_m} \exp [j\beta \sin(2\pi f_m t) - j2\pi n f_m t] dt \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{A_c}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp [j\beta \sin x - jnx] dx \quad \text{όπου θέσαμε } x = 2\pi f_m t$$

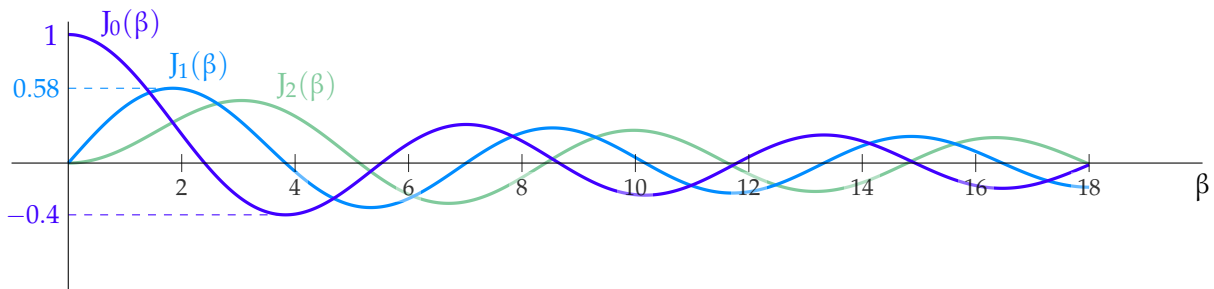
Το παραπάνω ολοκλήρωμα που καλούμαστε να υπολογίσουμε δεν μπορεί να εκφραστεί αναλυτικά, αλλά προκύπτει από **πίνακες** της ορισμένης ως εξής **συνάρτησης Bessel πρώτου είδους**:

Ορισμός 3.7: Συνάρτηση Bessel πρώτου είδους

Η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους έχει όρισμα το β και ορίζεται ως εξής:

$$J_n(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp [j(\beta \sin x - nx)] dx$$

Αριθμητικές τιμές αυτής της συνάρτησης μπορούμε να πάρουμε από πίνακες, διαγράμματα, αριθμομηχανές ή υπολογιστές.



Επομένως μπορούμε τώρα να θέσουμε:

$$c_n = A_c J_n(\beta)$$

και τελικά προκύπτει ότι:

$$\tilde{s}(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \exp(j2\pi n f_m t)$$

$$s(t) = A_c \operatorname{Re} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \exp [j2\pi (f_c + n f_m) t] \right]$$

$$s(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos [2\pi (f_c + n f_m) t]$$

Δηλαδή, αφού χρησιμοποιήσαμε την έννοια της μιγαδικής περιβάλλουσας και ορίσαμε τη συνάρτηση Bessel, προέκυψε η αναπαράσταση του διαμορφωμένου κατά FM σήματος στο φάσμα της συχνότητας.

Θεώρημα 3.1: FM ημιτονοειδών σημάτων

Για ένα ημίτονο συχνότητας f_m που διαμορφώνουμε κατά FM με φέρον f_c και β , το διαμορφωμένο σήμα είναι:

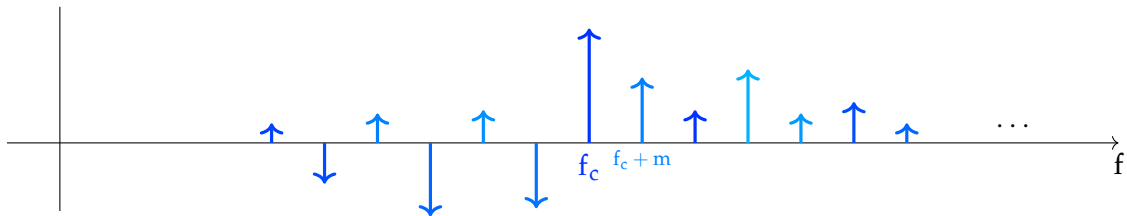
$$s(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos (2\pi f_c t + 2\pi n f_m t)$$

όπου J_n είναι η συνάρτηση J-Bessel (πρώτου είδους).

Στο πεδίο των συχνοτήτων έχουμε:

$$S(f) = \frac{A_c}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) [\delta(f - f_c - n f_m) + \delta(f + f_c + n f_m)]$$

Το φάσμα δηλαδή αποκτάει μια μορφή:



Σε συνδυασμό με το διάγραμμα της συνάρτησης Bessel, μπορούμε να δούμε πως όσο απομακρυνόμαστε από τη συχνότητα του φέροντος f_c , μειώνεται και το πλάτος των συχνοτήτων. Υπάρχει περιεχόμενο και στη συχνότητα f_c , αλλά για μερικές τιμές του β μπορεί να μηδενιστεί.

Ιδιότητες συναρτήσεων Bessel

- Ισχύει:

$$\begin{cases} \text{για } n \text{ άρτιο} & \implies J_n(\beta) = J_{-n}(\beta) \\ \text{για } n \text{ περιττό} & \implies J_n(\beta) = -J_{-n}(\beta) \end{cases}$$

δηλαδή ισχύει $J_n(\beta) = (-1)^n J_{-n}(\beta)$.

- Προσεγγιστικά για τις συναρτήσεις Bessel μπορούμε να θεωρήσουμε ότι, για μικρά β :

$$\begin{cases} J_0(\beta) \simeq 1 \\ J_1(\beta) \simeq \beta/2 \\ J_n(\beta) \simeq 0 \quad \text{για } n \geq 2 \end{cases}$$

Μάλιστα, αν θεωρήσουμε ότι ο δείκτης διαμόρφωσης β είναι αρκετά μικρός ώστε να έχουμε NBFM (Narrow Band FM), τότε προκύπτουν τα ίδια αποτελέσματα με την παραπάνω ανάλυση του NBFM.

- Τέλος, ισχύει:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = 1 \quad \forall \beta$$

Αυτή η σχέση είναι χρήσιμη για την εύρεση της ισχύος του σήματος:

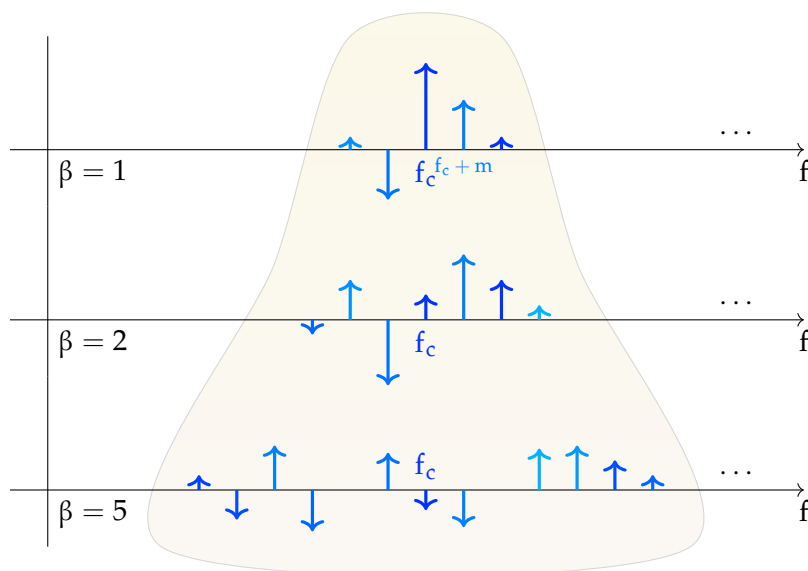
$$P = \frac{A_c^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta)$$

Παρατηρούμε ότι το φάσμα του FM εκτείνεται ως το άπειρο, κάτι που εξ' αρχής φαίνεται προβληματικό.

Προχωρώντας θυμόμαστε τους τύπους για την *απόκλιση συχνότητας* και το συντελεστή διαμόρφωσης:

$$\begin{aligned} \Delta f &= k_f A_m \\ \beta &= \frac{k_f A_m}{f_m} = \frac{\Delta f}{f_m} \end{aligned}$$

Μπορούμε να μεταβάλλουμε τα A_m και f_m , και να παρατηρήσουμε τη μεταβολή στο φάσμα των συχνοτήτων. Για παράδειγμα, αν μεταβάλλουμε το β διατηρώντας σταθερή τη συχνότητα του σήματος και μεταβάλλοντας το πλάτος:



Γενικά όμως βλέπουμε ότι οι πιο ισχυρές συχνότητες βρίσκονται Δf αριστερά και δεξιά της f_c . Επομένως, αν λάβουμε υπ' όψιν και μία ακόμα πλευρική ζώνη, προκύπτει ο εμπειρικός rule-of-thumb **κανόνας του Carson** για το εύρος ζώνης B_T :

$$\begin{aligned} B_T &\simeq 2\Delta f + 2f_m \\ &= 2\beta f_m + 2f_m \\ &= \boxed{2(\beta + 1)f_m \simeq B_T} \end{aligned}$$

Συγκρίνουμε το εύρος ζώνης αυτό με το αντίστοιχο του FM, που ήταν $B_T = 2f_m$. Το σήμα του FM, ειδικά για τιμές όπως $\beta = 5$, έχει πολλαπλάσιο ($B_T = 12f_m$) εύρος ζώνης από το αντίστοιχο του AM, και είναι *ευρυζωνικό* σήμα.

Γενικά, αν έχουμε εύρος ζώνης B_T , πρέπει να πάρουμε τουλάχιστον n_{\max} συχνότητες, όπου:

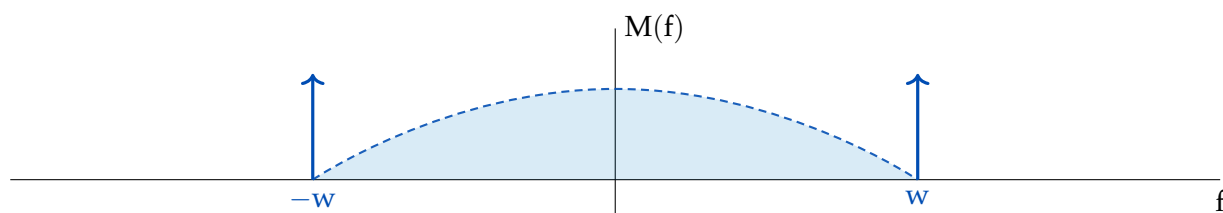
$$B_T = 2n_{\max}f_m$$

και το n_{\max} ή το B_T υπολογίζονται με τον κανόνα του Carson ή με έναν από τους παρακάτω τρόπους.

Ένας άλλος τρόπος να υπολογίσουμε το επιθυμητό εύρος ζώνης του φάσματος είναι αν από τις συχνότητες του φάσματος απορρίψουμε μόνο τις συχνότητες εκείνες που **έχουν πλάτος μικρότερο από το 1% του A_c** . Υπάρχουν μάλιστα πίνακες ή διαγράμματα που δείχνουν πόσες συχνότητες χρειάζεται να λάβουμε υπ' όψιν για κάθε επιλογή του β .

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να συμπεριλαμβανούμε συχνότητες μέχρι να φτάσουμε στο 98% της ισχύος του εκπεμπόμενου σήματος.

Η παραπάνω ανάλυση έγινε για ένα ημιτονοειδές σήμα πληροφορίας, αλλά δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ένα τυχαίο σήμα εύρους ζώνης w . Αντί για αυτό όμως, μπορούμε να θεωρήσουμε ένα ημιτονοειδές σήμα συχνότητας w , και να λάβουμε *ασφαλή* αποτελέσματα, αφού θεωρούμε την πιο δυσμενή περίπτωση.



Ορισμός 3.8: Ανάλυση τυχαίου σήματος FM στη συχνότητα

Σε αυτήν την ανάλυση, επανααντιστοιχίζουμε τα ονόματα των μεταβλητών ως εξής:

$$f_m \leftrightarrow w$$

$$\beta \leftrightarrow D \quad \text{λόγος απόκλισης}$$

Άρα ισχύουν οι τύποι:

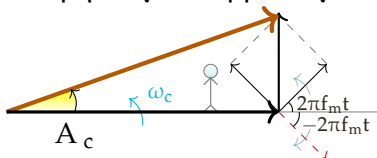
$$D = \frac{\Delta f}{w}$$

$$B_T = 2(D + 1)w$$

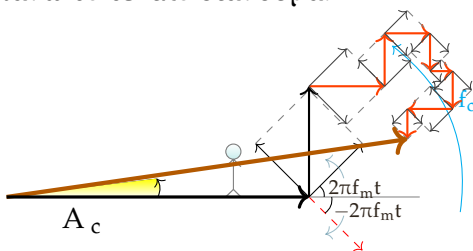
(Carson)

Μία τιμή που χρησιμοποιείται τυπικά για το Δf είναι 75 kHz.

Αντίστοιχα με τα NBFM, μπορούμε να παραστήσουμε τις δέλτα από τις οποίες αποτελείται σαν φασιθέτες (phasors). Για παράδειγμα, αν λάβουμε υπ' όψιν την κεντρική συνιστώσα και δύο πλευρικές, και θεωρήσουμε ότι βρισκόμαστε επάνω στο κινούμενο διάνυσμα της κεντρικής:



Αν μάλιστα προσθέσουμε και τις υπόλοιπες συνιστώσες, θα παρατηρήσουμε ότι επηρεάζουν παραπάνω το τελικό διάνυσμα:



Κάθε χρονική στιγμή το σήμα είναι το άθροισμα όλων αυτών των συνημιτόνων, και έχει μια ταχύτητα που επηρεάζεται από αυτά (με μέση τιμή ω_c), αλλά το συνολικό πλάτος του είναι πάντα A_c .

Παράδειγμα Ποιό είναι το εύρος ζώνης ενός FM σήματος με μέγιστη απόκλιση $\Delta f = 75$ kHz όπου το εύρος ζώνης του εκπεμπόμενου σήματος είναι $w = 15$ kHz;

Λύση Σύμφωνα με τον κανόνα του Carson:

$$B_T = 2(D + 1)w = 2 \cdot (5 + 1) \cdot 15 = 180 \text{ kHz}$$

κάτι πολύ μεγαλύτερο από το αντίστοιχο εύρος ζώνης του AM.

Αντίστοιχα, αν χρησιμοποιήσουμε τους κανόνες για 1% του πλάτους ή το 98% της ενέργειας, θα βρίσκαμε για $D = 5$, χρησιμοποιώντας πίνακες, $n_{\max} = 8$, άρα $B_T = 2n_{\max} \cdot w = 16 \cdot 15 = 240$ kHz, που είναι ένας πιο αυστηρός περιορισμός.

3.3 Υλοποίηση ενός συστήματος FM

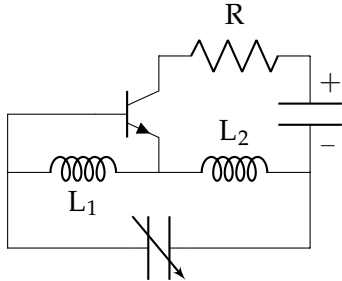
Να σημειωθεί ότι οι παρακάτω διατάξεις είναι αναλογικές και ίσως δεν χρησιμοποιούνται σήμερα έναντι των ψηφιακών αντίστοιχων, αλλά παρουσιάζονται για ιστορικούς σκοπούς.


3.3.1 Διαμορφωτής

Για να υλοποιήσουμε τον διαμορφωτή ενός σήματος βασικής ζώνης, χρειαζόμαστε απλώς έναν ταλαντωτή που να παράγει ένα ημίτονο του οποίου μεταβάλλεται η συχνότητα.

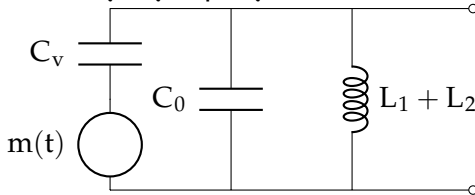
Τέτοιος ταλαντωτής μπορεί να είναι **Voltage Controlled Oscillator (VCO)**, δηλαδή ταλαντωτής του οποίου η συχνότητα μεταβάλλεται από τάση.

Ένα τέτοιο κύκλωμα είναι:



όπου ο μεταβλητός πυκνωτής (varicap/varactor) μπορεί να υλοποιηθεί από μια ανάστροφα πολωμένη δίοδο  της οποίας η χωρητικότητα μεταβάλλεται ανάλογα με την εφαρμοζόμενη τάση.

Ισοδύναμα, μπορούμε να απλουστεύσουμε το κύκλωμα ως εξής:



Αυτό το κύκλωμα έχει μια μεταβλητή συχνότητα η οποία, με γνώσεις από ανάλυση κυκλωμάτων, είναι:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(L_1 + L_2)C(t)}}$$

όπου η στιγμιαία χωρητικότητα είναι $C(t) = C_0 + \Delta C \cos 2\pi f_m t$ να θεωρήσουμε ότι έχουμε ημιτονοειδές (με συχνότητα f_m) σήμα εισόδου $m(t)$.

Τότε η στιγμιαία συχνότητα γίνεται:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(L_1 + L_2)C_0}\sqrt{1 + \frac{\Delta C}{C_0} \cos 2\pi f_m t}}$$

Ορίζουμε $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{(L_1 + L_2)C_0}}$, και χρησιμοποιούμε την προσέγγιση $\sqrt{1 + \varepsilon} \simeq 1 + \frac{\varepsilon}{2}$.

Τότε:

$$f_i(t) \simeq \frac{f_0}{1 + \frac{\Delta C}{2C_0} \cos 2\pi f_m t}$$

Επιπλέον προσεγγίζουμε $\frac{1}{1 + \varepsilon} \simeq 1 - \varepsilon$.

$$f_i(t) \simeq f_0 \left[1 - \frac{\Delta C}{2C_0} \cos 2\pi f_m t \right]$$

$$f_i(t) \simeq f_0 - \underbrace{\frac{f_0 \Delta C}{2C_0}}_{\Delta f} \cos 2\pi f_m t$$

όπου θέσαμε τον σταθερό όρο $\frac{f_0 \Delta C}{2C_0} = \Delta f$

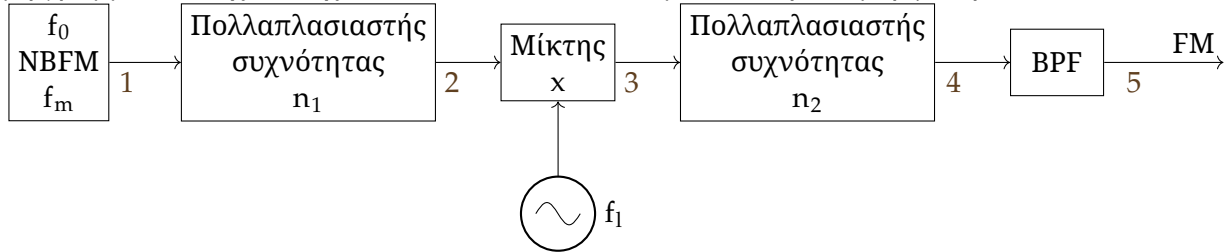
$$= f_0 + \Delta f \cos 2\pi f_m t$$

Δηλαδή φτάσαμε στο επιθυμητό σήμα FM, για το οποίο ισχύει $f_i(t) = f_c + k_f m(t)$.

3.3.2 Διαμορφωτής με NBFM

Εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα σήμα NBFM για να κατασκευάσουμε έμμεσα ένα σήμα FM. Θυμόμαστε ότι το σήμα NBFM είναι ένα FM με χαμηλό β , π.χ. $\beta \leq 0.3$, και μοιάζει με AM, οπότε είναι εύκολο να κατασκευάσουμε έναν διαμορφωτή του.

Τότε, χρησιμοποιώντας πολλαπλασιαστές συχνότητας, που είναι στοιχεία που κατασκευάζονται με μη γραμμικά στοιχεία (π.χ διόδους), κατασκευάζουμε τον εξής διαμορφωτή:



Σε κάθε σημείο του διαμορφωτή αυτού θα έχουμε το σήμα:

1) Το διαμορφωμένο NBFM είναι:

$$A_c \cos(2\pi f_0 t + \beta \sin 2\pi f_m t)$$

2) Πολλαπλασιάζουμε τη συχνότητα με n_1 και έχουμε:

$$A_c \cos[2\pi n_1 f_0 t + n_1 \beta \sin 2\pi f_m t]$$

3) Μετακινούμε τη συχνότητα κατά f_1 :

$$A_c \cos[2\pi(n_1 f_0 + f_1)t + n_1 \beta \sin 2\pi f_m t]$$

4) Πολλαπλασιάζουμε τη συχνότητα με n_2 :

$$A_c \cos[2\pi n_2(n_1 f_0 + f_1)t + n_2 n_1 \beta \sin 2\pi f_m t]$$

Δηλαδή καταλήξαμε σε ένα σήμα FM για το οποίο ισχύει:

$$f_c = n_2(n_1 f_0 + f_1)$$

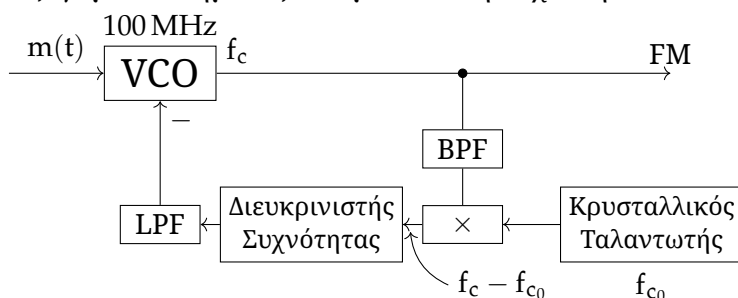
$$\beta_{\text{τελ}} = n_1 n_2 \beta$$

Επομένως μπορούμε να δημιουργήσουμε το τελικό Wide-Band σήμα FM με τις παραμέτρους f_c και $\beta_{\text{τελ}}$ που επιθυμούμε, αλλάζοντας κατάλληλα τις μεταβλητές των στοιχείων n_1 , n_2 και f_1 .

3.3.3 Υλοποίηση PLL (Phase-Locked Loop) με διαμορφωτή FM

Με τη χρήση ενός διαμορφωτή και ενός αποδιαμορφωτή FM (που θα δούμε παρακάτω), μπορούμε να υλοποιήσουμε ένα κύκλωμα PLL, που ακολουθεί δηλαδή τη συχνότητα και τη φάση ενός εισερχόμενου σήματος.

Για να το καταφέρουμε αυτό, προσθέτουμε ως αρνητική ανάδραση τη διαφορά της συχνότητας του εξαγόμενου σήματος από μία τοπική συχνότητα:



3.3.4 Αποδιαμόρφωση FM

Το FM σήμα φαίνεται αρχικά δύσκολο να αποδιαμορφωθεί:

$$s_{FM}(t) = A_c \cos \left(2\pi f_c t + 2\pi k_p \int_0^t m(\lambda) d\lambda \right)$$

Αν όμως το παραγωγίσουμε, παίρνουμε:

$$\frac{ds_{FM}(t)}{dt} = -A_c 2\pi \left(1 + k_p m(t) \right) \cdot \sin \left(2\pi f_c t + 2\pi k_p \int_0^t m(\lambda) d\lambda \right)$$

επομένως για να υλοποιήσουμε τον αποδιαμορφωτή μπορούμε απλώς να πάρουμε την παράγωγο του FM και να την τοποθετήσουμε στην είσοδο ενός αποδιαμορφωτή AM, αφού ουσιαστικά το παραπάνω σήμα είναι ένα ημίτονο πλάτους $A_c 2\pi (1 + k_p m(t))$, δηλαδή είναι ένα σήμα διαμορφωμένο κατά AM.

Θυμόμαστε τον ορισμό της μιγαδικής περιβάλλουσας $\tilde{s}(t)$ του σήματος:

$$s(t) = \text{Re} [\tilde{s}(t) \exp(j2\pi f_c t)], \quad \tilde{s}(t) = A_c \exp [j\beta \sin(2\pi f_m t)]$$

και τη λειτουργία μιας συνάρτησης μεταφοράς με κρουστική απόκριση $h(t)$:

$$h(t) = \text{Re} [\tilde{h}(t) \exp(j \cdot 2\pi f_c t)]$$

$$x(t) = \text{Re} [\tilde{x}(t) \exp(j2\pi f_c t)] \xrightarrow{\boxed{h(t)}} y(t) = \text{Re} [\tilde{y}(t) \exp(j2\pi f_c t)] = x(t) * h(t)$$

$$H(f)$$

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

Μπορούμε να βρούμε για ευκολία το ισοδύναμο χωρίς την επίδραση της συχνότητας:

$$\tilde{x}(t) \xrightarrow{\boxed{\tilde{h}(t)}} 2\tilde{y}(t)$$

$$\tilde{h}(t) \leftrightarrow \tilde{H}(f)$$

όπου μαθηματικά αποδεικνύεται ότι:

$$\tilde{H}(f - f_c) = 2H(f) \iff \tilde{H}(f) = 2H(f + f_c)$$

και τότε μπορούμε να βρούμε τα $\tilde{x}(t)$, $\tilde{h}(t)$ (από τα $x(t)$ και $h(t)$ αντίστοιχα), το $\tilde{Y}(t) = \frac{1}{2}\tilde{H}(f)\tilde{X}(f)$ και το τελικό $y(t)$ από το $\tilde{y}(t)$.

Για την αποδιαμόρφωση FM υπάρχουν δύο κυκλώματα: ο διευκρινιστής συχνότητας, και το PLL.

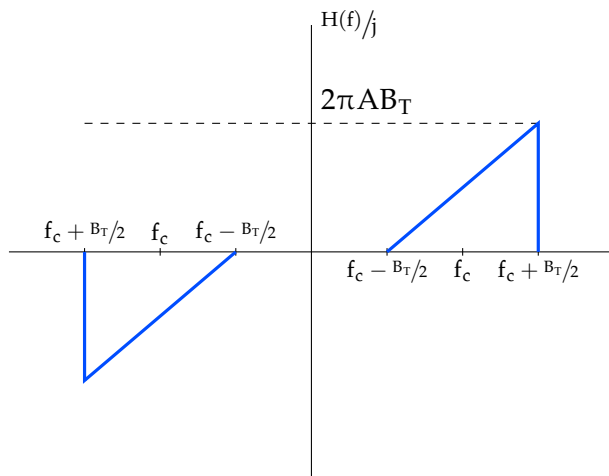
3.3.5 Διευκρινιστής συχνότητας

Ο διευκρινιστής συχνότητας αποτελείται από έναν διαφοριστή (βρίσκει παραγώγους) και έναν αποδιαμορφωτή περιβάλλουσας (AM), όπως περιγράψαμε και παραπάνω.

Ο **διαφοριστής** κατασκευάζεται με ένα **κύκλωμα κλίσης** (slope circuit), το οποίο είναι ένα φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς:

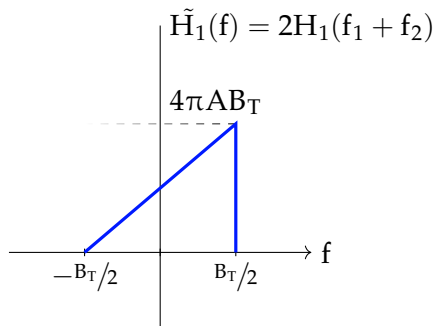
$$h_1(f) = \begin{cases} j2\pi\alpha (f - f_c + B_T/2), & A_c - B_T/2 \leq f \leq f_c + B_T/2 \\ j2\pi\alpha (f + f_c - B_T/2), & -f_c - B_T/2 \leq f \leq -f_c + B_T/2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

που έχει τη μορφή:



Αν χρησιμοποιήσουμε τις μιγαδικές περιβάλλουσες (που μεταφέρουν το φίλτρο στη βασική ζώνη):

$$\tilde{H}_1(f) = \begin{cases} j4\pi\alpha (f + B_T/2), & -B_T/2 \leq f \leq B_T/2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



και με είσοδο το FM σήμα $\tilde{s}(t) = A_c \exp \left[j2\pi k_f \int_0^t m(\lambda) d\lambda \right]$, σύμφωνα με τη θεωρία που παρουσιάσαμε παραπάνω η έξοδος μετά την εφαρμογή του φίλτρου θα είναι:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1(f) &= \frac{1}{2} \tilde{H}_1 \cdot \tilde{S}(f) = \begin{cases} j2\pi\alpha (f + B_T/2) \cdot \tilde{S}(f), & -B_T/2 \leq f \leq B_T/2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \\ &= \begin{cases} j2\pi\alpha \tilde{S}(f) + j2\pi\alpha B_T/2 \tilde{S}(f) & , \quad -B_T/2 \leq f \leq B_T/2 \\ 0 & , \quad \text{αλλού} \end{cases} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε πως φτάνουμε σε μια σχέση που περιέχει το αντίστοιχο της παραγώγου στο πεδίο των συχνοτήτων (f πολλαπλασιασμένο με $\tilde{S}(f)$).

Εφαρμόζοντας αντίστροφο Μ/Σ Fourier στο παραπάνω, κάνουμε πράξεις:

$$\begin{aligned} \tilde{s}_1(t) &= a \left[\frac{d\tilde{s}(t)}{dt} + j\pi B_T \tilde{s}(t) \right] \\ &= ja\pi B_T \left[\frac{1}{j\pi B_T} \frac{d\tilde{s}(t)}{ds} + \tilde{s}(t) \right] \\ &= ja\pi B_T A_c \left[\frac{1}{j\pi B_T} j2\pi k_f m(t) + 1 \right] \exp \left[j2\pi k_f \int_0^t m(\lambda) d\lambda \right] \\ s_1(t) &= \text{Re} \left[\tilde{s}_1(t) \exp(j2\pi f_c t) \right] \\ &= \pi a B_T A_c \left[1 + \frac{2k_f}{B_T} m(t) \right] \cos \left(2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\lambda) d\lambda + \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

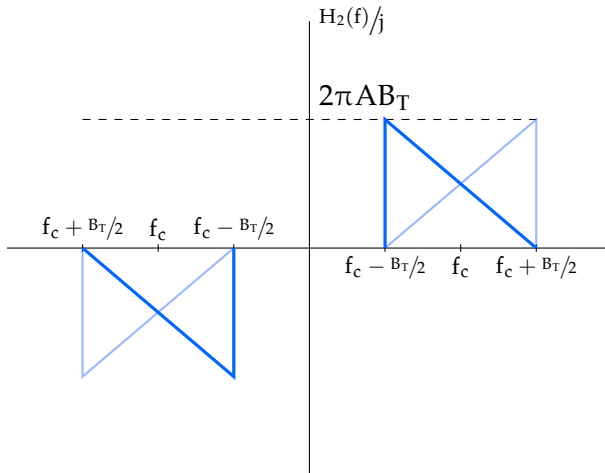
Δηλαδή προέκυψε ένα υβριδικό σήμα AM-FM, από το οποίο μπορούμε να εξάγουμε την περιβάλλουσα, δεδομένου ότι ισχύει η συνθήκη που εξασφαλίζει ότι δεν έχουμε υπερδιαμόρφωση:

$$\left| \frac{2k_f}{B_T} m(t) \right| < 1$$

τότε η περιβάλλουσα είναι:

$$|\tilde{s}_1(t)| = \pi B_T a A_c \left[1 + \frac{2k_f}{B_T} m(t) \right]$$

Για να πάρουμε την καθαρή πληροφορία, μπορούμε να εφαρμόσουμε και ένα δεύτερο φίλτρο H_2 :



που δίνει έξοδο:

$$|\tilde{s}_2(t)| = \pi B_T a A_c \left[1 - \frac{2k_f}{B_T} m(t) \right]$$

Αν αφαιρέσουμε τις εξόδους των δύο φίλτρων, έχουμε:

$$s_o(t) = |\tilde{s}_1(t)| - |\tilde{s}_2(t)| = 4\pi k_f a A_c m(t)$$

Τελικά το διάγραμμα του αποδιαμορφωτή μοιάζει κάπως έτσι:



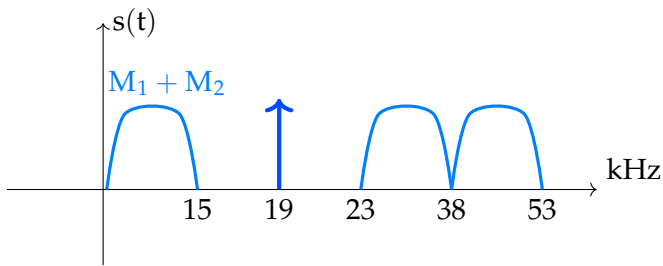
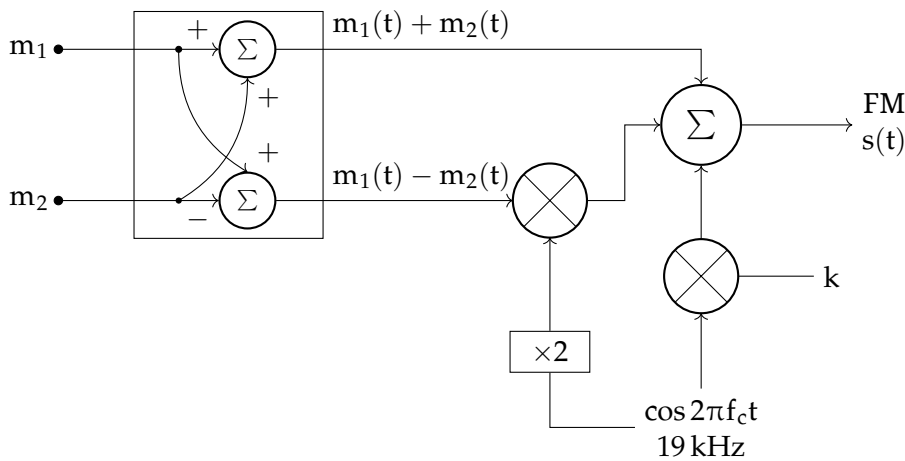
Ο αποδιαμορφωτής αυτός ονομάζεται **balanced frequency discriminator**.

Η αφαίρεση μάλιστα των εξόδων των δύο φίλτρων βοηθάει ώστε να πραγματοποιηθεί η παραγωγή ακόμα και στην περίπτωση που αυτά δεν είναι ιδανικά.

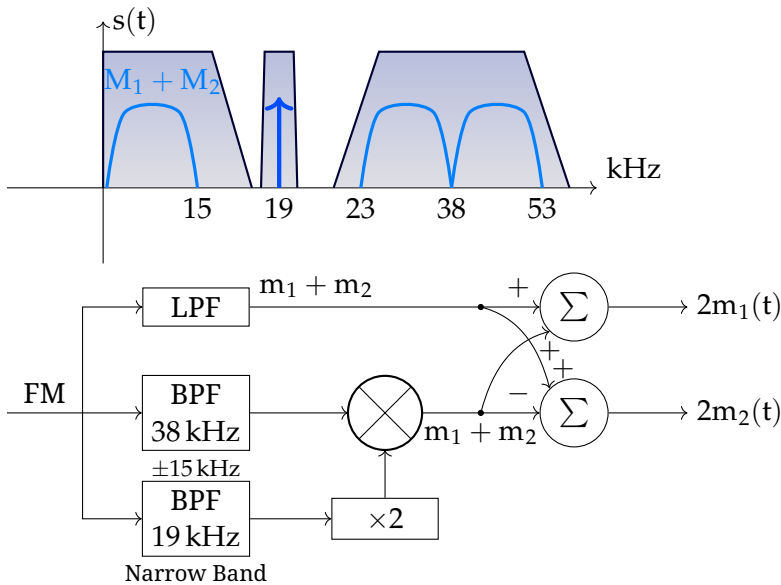
3.4 Στερεοφωνικό FM

Στο στερεοφωνικό FM θέλουμε να μεταδίδουμε 2 σήματα ήχου (αριστερό και δεξί) αντί για μόνο 1. Επειδή όμως στην εποχή που υλοποιήθηκε το στερεοφωνικό FM είχαν ήδη διαδοθεί οι μονοφωνικοί δέκτες, έπρεπε να χρησιμοποιηθεί ένα είδος πολυπλεξίας που να μην επηρέαζε τις ακροάσεις τους.

Η στερεοφωνική διαμόρφωση λειτουργεί στέλνοντας το άθροισμα και τη διαφορά των δύο σημάτων (αριστερού και δεξιού). Στη συνέχεια, κρατάμε το άθροισμα, μετακινούμε τη διαφορά λίγο πιο πάνω στη συχνότητα, και προσθέτουμε έναν πιλοτικό τόνο ανάμεσα στα δύο κανάλια:



Έτσι, ο αποδιαμορφωτής του στερεοφωνικού FM χρειάζεται ένα Low Pass φίλτρο για να πάρει το αριστερό κανάλι, και ένα Band Pass φίλτρο για να πάρει το δεξί κανάλι. Στη συνέχεια, πολλαπλασιάζει το δεξί κανάλι με τον πιλοτικό τόνο σε έναν μίκτη, έτσι ώστε να το μεταφέρει στη βασική ζώνη. Στο τέλος, προσθαφαιρούνται κατάλληλα τα σήματα ώστε από τα $m_1 + m_2$ και $m_1 - m_2$ να εξαχθούν τα m_1 και m_2 :



Ταυτόχρονα, με αυτόν τον τρόπο, οι δέκτες που δεν υποστηρίζουν stereo "βλέπουν" μόνο το σήμα $s(t)$ μέχρι τα 15 kHz (που είναι το άθροισμα του αριστερού και του δεξιού), και βγάζουν μόνο αυτό το σήμα και στα δύο ηχεία. Από την άλλη μεριά, οι στερεοφωνικοί δέκτες που συντονίζονται σε έναν μονοφωνικό σταθμό FM βλέπουν το σήμα στη θέση $m_1 + m_2$, και δε βλέπουν τίποτα στο $m_1 - m_2 = 0$, οπότε παράγουν το ίδιο σήμα και στο αριστερό, και στο δεξί ηχείο, που είναι η επιθυμητή συμπεριφορά.

3.5 Ασκήσεις

Ερώτηση Στον τύπο για το FM:

$$s(t) = A_c \cos \left(2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right)$$

γιατί υπάρχει το ολοκλήρωμα μέσα στο συνημίτονο, και τι δηλώνει αυτό;

Απάντηση Η (γωνιακή) συχνότητα είναι η παράγωγος της γωνίας, επομένως σε αυτήν την περίπτωση είναι η παράγωγος του ολοκληρώματος, δηλαδή το σήμα $m(t)$, το οποίο θέλουμε να είναι διαμορφωμένο κατά συχνότητα.

Πράγματι, στο FM θέλουμε η **στιγμιαία** συχνότητα να είναι:

$$f_i = f_c + k_f m(t)$$

όμως η παράγωγος της γωνίας είναι η συχνότητα, άρα:

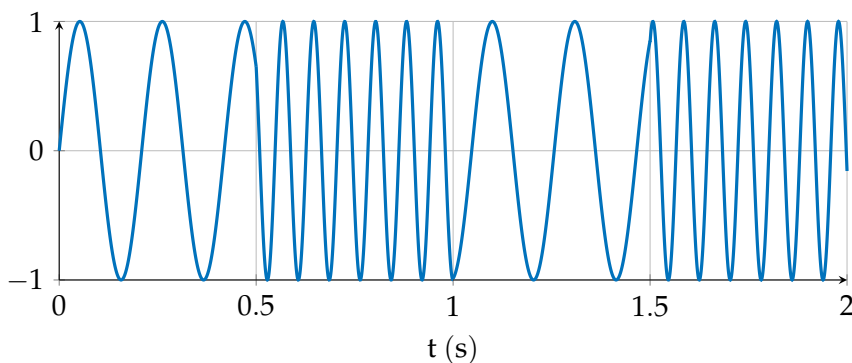
$$f_i = 2\pi \frac{d\theta(t)}{dt}$$

επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \int_0^t 2\pi f_i(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t 2\pi [f_c + k_f m(\tau)] d\tau \\ &= 2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \end{aligned}$$

που είναι ίδια με την έκφραση εντός του συνημιτόνου.

Ερώτηση Δίνεται το διαμορφωμένο κατά PM σήμα:



Το αρχικό σήμα είναι ένας τόνος $f_m = 1$ Hz. Αυτός ο τόνος είναι ημίτονο ή συνημίτονο;

Λύση Θυμόμαστε ότι στα FM σήματα η συχνότητα και η φάση είναι της μορφής:

$$f_i(t) = f_c + k_f m(t)$$

$$\theta(t) = 2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau$$

Αντίστοιχα, στα PM σήματα η φάση είναι που εξαρτάται απ' ευθείας από το σήμα:

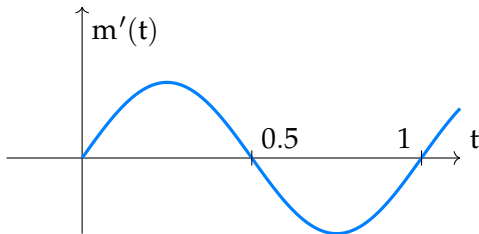
$$\theta(t) = 2\pi f_c t + k_p m(t)$$

και η στιγμιαία συχνότητα εξαρτάται από την **παράγωγο** της πληροφορίας:

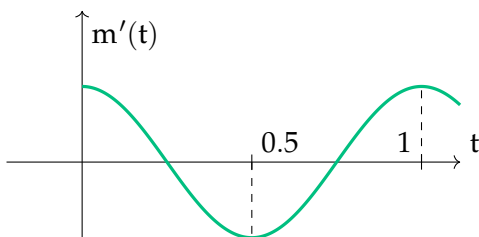
$$f_i(t) = f_c + \frac{k_p}{2\pi} m'(t)$$

Θα ελέγξουμε τη συχνότητα του σήματος που μας δίνεται. Μεταξύ του 0 και 0.5 το σήμα είναι αραιό, ενώ μεταξύ του 0.5 και του 1 το σήμα είναι πυκνό. Λαμβάνουμε περιπτώσεις:

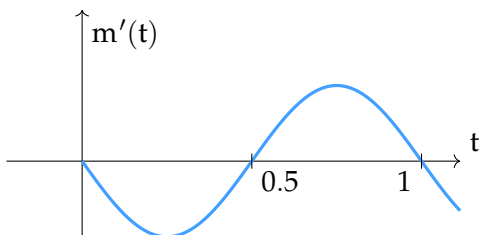
- Έστω $m'(t) = \sin 2\pi t$



- Έστω $m'(t) = \cos 2\pi t$



- Έστω $m'(t) = -\sin 2\pi t$



Τα αραιώματα αντιστοιχούν σε αρνητική τιμή της $m'(t)$, ενώ τα πυκνώματα σε θετική. Η συνάρτηση που ταιριάζει περισσότερο είναι η $m'(t) = -\sin 2\pi t$, άρα $m(t) = \cos 2\pi t$.

Ερώτηση Η κινητή τηλεφωνία πρώτης γενιάς (1G) χρησιμοποιούσε διαμόρφωση FM. Επιχειρηματολογήστε σύντομα υπέρ αυτής της επιλογής έναντι της διαμόρφωσης AM χρησιμοποιώντας κριτήρια όπως:

- Πολυπλοκότητα
- Φάσμα
- Εμπορικό ενδιαφέρον
- Μέγεθος κινητών συσκευών

Απάντηση Για να απαντήσουμε σε αυτήν την ερώτηση πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν τις συνθήκες της εποχής. Τη στιγμή που αυτή ήταν μια καινούρια τεχνολογία, υπήρχε μικρό εμπορικό ενδιαφέρον, και η κινητή τηλεφωνία απευθυνόταν κυρίως σε επαγγελματίες και άτομα που είχαν την οικονομική δυνατότητα να επενδύσουν στη δυνατότητα να έχουν ένα κινητό και να μπορούν να επικοινωνήσουν ανά πάσα στιγμή. Επομένως, η πολυπλοκότητα και το κόστος δεν αποτελούσε σημαντικό κριτήριο.

Με την ίδια λογική με παραπάνω, δεν έχουμε κάποια ιδιαίτερη απαίτηση από το φάσμα, δεδομένου ότι έχουμε πολύ μικρό αριθμό πελατών, και μπορούμε να ξοδέψουμε κάποιο εύρος συχνοτήτων.

Αντίθετα, το AM ξοδεύει μεγάλη ποσότητα της ενέργειας στο σήμα του φέροντος (τουλάχιστον τα $\frac{2}{3}$ της συνολικής), κάτι που θα καθιστούσε τις συσκευές πολύ μεγάλες, επειδή θα απαιτούσαν τεράστια ισχύ για να πετύχουν την ίδια εμβέλεια με το FM.

Άσκηση Το αδιαμόρφωτο φέρον ενός διαμορφωτή FM έχει συχνότητα $f_c = 1.4 \text{ MHz}$ πλάτους $A_c = 30 \text{ V}$.

Η διαμόρφωση συχνότητας είναι τέτοια ώστε σήμα πλάτους $A_m = 1 \text{ mV}$ να αντιστοιχεί σε μεταβολή $\Delta_f = 3 \text{ kHz}$.

- α) Έστω ένα σήμα πληροφορίας $m(t) = A_m \cdot \cos(94247.78t)$. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του A_m ώστε το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος να είναι $B_T \leq 0.04 \cdot f_c$
- β) Αν επιλέξω το πλάτος του μηνύματος να είναι $A_m = \frac{A_{\max}}{4}$ να προσδιοριστεί η ισχύς P_s του διαμορφωμένου σήματος FM, καθώς και το εύρος ζώνης που καταλαμβάνει.

Λύση

α) Το σήμα πληροφορίας έχει συχνότητα που υπολογίζεται ως εξής:

$$2\pi f_m t = 94247.78t \implies f_m = 15 \text{ kHz}$$

Το εύρος ζώνης θέλουμε να είναι:

$$B_T \leq 0.04 \cdot 1.4 \text{ MHz} = 56 \text{ kHz}$$

Όμως, από τον **κανόνα του Carson**, για το εύρος ζώνης ισχύει:

$$B_T = 2f_m(1 + \beta) \implies 2f_m(1 + \beta) \leq 56 \text{ kHz} \implies \underline{\beta \leq 0.8667}$$

Με τόσο μικρό β παίρνουμε FM στενής ζώνης (Narrow Band FM – NBFM).

Από τα δεδομένα μπορούμε ακόμα να βρούμε και το k_f :

$$\Delta_f = k_f \cdot A_m \implies \underline{k_f = 3 \cdot 10^6 \text{ Hz/V}}$$

Τέλος, εφαρμόζουμε τον τύπο για το β :

$$\beta = \frac{k_f \cdot A}{f_m} \implies A = \frac{\beta \cdot f_m}{k_f} \leq \frac{0.8667 \cdot 15 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^6} = 4.3 \text{ mV}$$

Άρα το μέγιστο πλάτος είναι:

$$\underline{A_{\max} = 4.3 \text{ mV}}$$

β) Θυμόμαστε ότι το διαμορφωμένο σήμα είναι:

$$s(t) = A_c \cos \left(\underbrace{2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau}_{\theta(\tau)} \right) = A_c \cos \theta(\tau)$$

δηλαδή απλώς ένα συνημίτονο με μια γωνία.

Άρα η ισχύς του είναι (αν θεωρήσουμε τη σύμβαση της αντίστασης 1Ω):

$$P_s = \frac{A_c^2}{2} = 450 \text{ W}$$

Για το εύρος ζώνης, από τον κανόνα του Carson:

$$B_T = 2f_m(1 + \beta) = 30 \text{ kHz} \cdot (1 + 0.215) = 36.45 \text{ kHz}$$

Ερώτημα Γιατί η τιμή του δείκτη διαμόρφωσης β που καθορίζει αν ένα σήμα FM είναι στενής ή ευρείας ζώνης είναι $\beta = 1$;

Συμβουλευτείτε το διάγραμμα με τις συναρτήσεις Bessel.

Απάντηση Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ένα NBFM σήμα έχει τη μορφή:

$$s(t) = A_c \cdot \cos 2\pi f_c t - \beta \cdot A_c \sin 2\pi f_m t \cdot \sin 2\pi f_c t \quad (1)$$

αν θεωρήσουμε ότι $m(t) = -\cos 2\pi f_m t$.

Θυμόμαστε επίσης την αρχική μορφή του FM:

$$s(t) = A_c \cdot \cos (2\pi f_c t + \beta \cdot \sin 2\pi f_m t)$$

Αναπτύσσουμε την τελευταία σχέση με βάση τις τριγωνομετρικές ιδιότητες και έχουμε:

$$s(t) = A_c \cdot \cos 2\pi f_c t \cdot \cos (\beta \cdot \sin 2\pi f_m t) - A_c \sin 2\pi f_c t \cdot \sin (\beta \cdot \sin 2\pi f_m t) \quad (2)$$

Η (2) μοιάζει με την αρχική (1) αν το β είναι αρκετά μικρό. Πράγματι, μπορούμε να λάβουμε τα αναπτύγματα Taylor του ημιτόνου και του συνημιτόνου:

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \end{aligned}$$

Για πολύ μικρά x , το $\cos x \approx 1$ και το $\sin x \approx x$, επομένως:

$$\begin{aligned} \cos(\beta \cdot \sin 2\pi f_m t) &\simeq 1 \\ \sin(\beta \cdot \sin 2\pi f_m t) &\simeq \beta \cdot \sin 2\pi f_m t \end{aligned}$$

Εναλλακτικά, λαμβάνοντας υπ' όψιν τις συναρτήσεις Bessel, θυμόμαστε από τη θεωρία πως για το FM ισχύει:

$$s(t) = A_c \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cdot \cos (2\pi (f_c + n f_m) t)$$

Από το διάγραμμα των συναρτήσεων Bessel 1^{ου} είδους, παρατηρούμε ότι πριν από το 1, οι συναρτήσεις J_2, J_3, J_4, \dots αποκτούν όλο και περισσότερο αμελητέες τιμές. Πράγματι, αν θεωρήσουμε ότι $n \in \{-1, 0, 1\}$, τότε μένουν μόνο οι 3 όροι που υπάρχουν και στην έκφραση (1) του NBFM.

Μπορούμε ακόμα να υπολογίσουμε την ισχύ του εξαγόμενου σήματος. Η ισχύς του πλήρους FM είναι:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = 1$$

Αντίστοιχα, η ισχύς με τους 3 πρώτους όρους μόνο είναι:

$$\sum_{n=-1}^1 J_n^2(\beta) \simeq 97\%$$

που είναι αποδεκτό.

Γλωσσάρι

AM Amplitude Modulation.

CDMA Code-Division Multiple Access.

DSB Double Side-Band.

DSB-SC Double Side-Band – Suppressed Carrier.

FDMA Frequency-Division Multiple Access.

FM Frequency Modulation.

LSB Lower Side-Band.

NBFM Narrow-Band Frequency Modulation.

PLL Phase-Locked Loop.

PM Phase Modulation.

QAM Quadrature Amplitude Modulation.

SSB Single Side-Band.

TDMA Time-Division Multiple Access.

USB Upper Side-Band.

VSF Vestigial Side-Band.

MF Μετασχηματισμός Fourier.