ΨΕΣ

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Σημειώσεις από τις παραδόσεις*

Για τον κώδικα σε LaTeX, ενημερώσεις και προτάσεις:
https://github.com/kongr45gpen/ece-notes

Οκτώβριος 2018

Τελευταία ενημέρωση: 14 Νοεμβρίου 2018

Λάθη & Διορθώσεις

Οι τελευταίες εκδόσεις των σημειώσεων βρίσκονται στο Github (https://github.com/kongr45gpen/ece-notes/raw/master/dsp.pdf) ή στη διεύθυνση http://helit.org/ece-notes/dsp.pdf.
Περιέχουν διορθώσεις σε λάθη και τυχόν βελτιώσεις.

Μπορείτε να ενημερώνετε για οποιοδήποτε λάθος και πρόταση μέσω PM στο forum, issue στο Github, ή οποιουδήποτε άλλου τρόπου.

Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή

Διάλεξη 1η
1/10/2018

Στο μάθημα της **Ψηφιακής Επεξεργασίας Σήματος** ασχολούμαστε με προβλήματα όπως το εξής:

Παλιότερα, αν μας ζητούνταν να κατασκευάσουμε ένα φίλτρο (π.χ. ζωνοπερατό από 20 Hz - 500 kHz), μπορούσαμε πολύ εύκολα να αγοράσουμε μια σακούλα με όλα τα εξαρτήματα (πυκνωτές, αντιστάσεις, …) από ένα κατάστημα και να φτιάξουμε το κύκλωμα.

Αν αργότερα μας ζητούσαν να φτιάξουμε ένα φίλτρο 20 Hz - 300 kHz, θα έπρεπε να ξαναπάμε στο κατάστημα και να αγοράσουμε ξανά νέα σακούλα και νέα εξαρτήματα και να ξανακατασκευάσουμε το κύκλωμα.

Από τη στιγμή όμως που εφευρέθηκαν οι υπολογιστές, φανταστήκαμε να τους χρησιμοποιήσουμε και για να πραγματοποιήσουμε την παραπάνω διαδικασία και να αλλάζουμε προδιαγραφές όσο συχνά θέλουμε χωρίς να τρέχουμε στο κατάστημα.

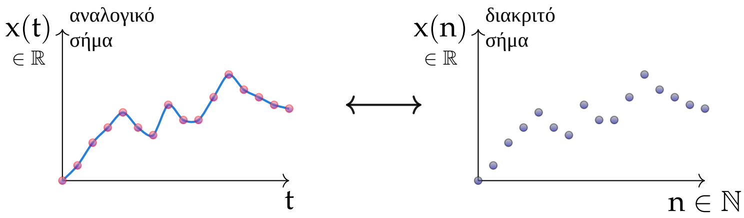
Αυτή η διαδικασία απαιτεί τα εξής:

- Πρέπει να μετατρέψουμε το *πραγματικό αναλογικό* σήμα σε μια μορφή που αναγνωρίζει αυτός ο υπολογιστής. Δηλαδή να μετατραπεί από αναλογικό σε ψηφιακό. Αυτό γίνεται με δύο βήματα:

  1. **Δειγματοληψία**. Πρώτα πρέπει με έναν συγκεκριμένο τρόπο να λάβουμε *δείγματα* σε *διακριτές* στιγμές του αρχικού αναλογικού σήματος. Αφού ο υπολογιστής δεν μπορεί να αποθηκεύσει άπειρες τιμές, αναγκαστικά θα λάβουμε ένα πεπερασμένο εύρος τους.

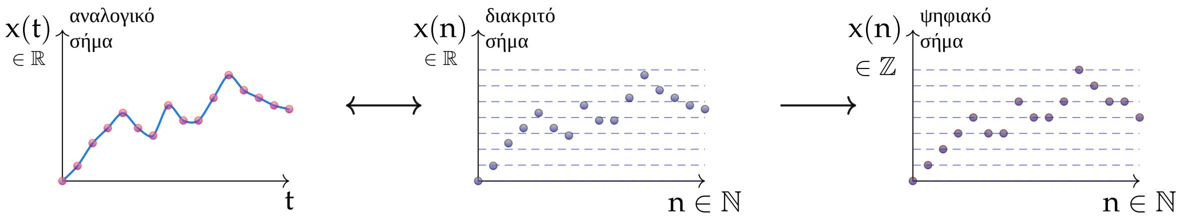
---

*Όπως διδάσκονται στο τμήμα *Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών* στο *Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης*.



Αυτό το σήμα ονομάζεται **διακριτό** (**discrete**).

2. **Κβάντωση**. Στον αναλογικό κόσμο, οι πεπερασμένες τιμές έχουν άπειρη ακρίβεια. Όμως στον υπολογιστή δεν μπορούμε να αποθηκεύσουμε άπειρα δεκαδικά ψηφία, αλλά πρέπει να τα αποθηκεύσουμε σε πεπερασμένες στάθμες που μας επιτρέπεται να χρησιμοποιηθούν.



Αυτό το σήμα ονομάζεται **ψηφιακό** (**digital**).

Σε αυτό το μάθημα, παρά τον τίτλο του, θα ασχοληθούμε με **διακριτά σήματα**, και όχι ψηφιακά.

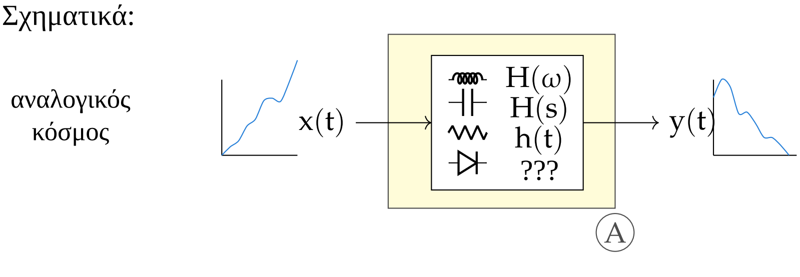
Για να επεξεργαστούμε τα σήματα, υποθέτουμε ότι θα υπάρχει μια συσκευή που μετατρέπει το *Αναλογικό σήμα* σε *Διακριτό σήμα* με τέτοιον τρόπο ώστε να μπορούμε να γυρίσουμε πίσω και να μπορούμε να το επεξεργαστούμε με έναν ασφαλή τρόπο που θα επιστρέψει σίγουρα σωστό αποτέλεσμα. Αυτό το εξασφαλίζει το **θεώρημα δειγματοληψίας** (Nyquist-Shannon), σύμφωνα με το οποίο για να αναπαραστήσουμε ένα ζωνοπερατό σήμα, αρκεί να το δειγματοληπτήσουμε με συχνότητα διπλάσια της μέγιστης συχνότητας του σήματος.

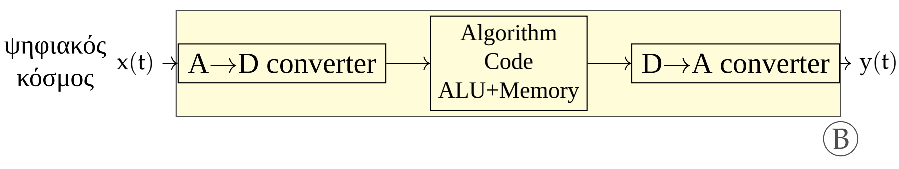
Στην πραγματικότητα βέβαια, το θεώρημα δειγματοληψίας απαιτεί να δειγματοληπτούμε για άπειρο χρόνο, κάτι μη πραγματικά εφικτό. Μάλιστα, τα πραγματικά σήματα είναι *χρονοπερατά*, άρα *μη ζωνοπερατά*, επομένως εν γένει δεν εφαρμόζεται το θεώρημα δειγματοληψίας. Όμως η παραπάνω διαδικασία μπορούμε να πούμε ότι δίνει προσεγγιστικά ορθό αποτέλεσμα.

Ακόμα, υπάρχουν σήματα που είναι από τη φύση τους ψηφιακά, όπως τιμές χρηματιστηρίου, ακολουθίες, δεδομένα, followers στο instagram, …

- Παραμένει η ίδια η **επεξεργασία** του σήματος. Αυτή γίνεται με κώδικα ενός αλγορίθμου που εκτελεί πράξεις, δεδομένου ότι έχει επεξεργαστεί το σήμα σωστά.

Σχηματικά:





Θέλουμε η διαδικασία A που είναι ένα **πραγματικό, φυσικό** φίλτρο ή κύκλωμα, να βγάζει περίπου ίδιο αποτέλεσμα με μια διαδικασία B που υλοποιούμε ψηφιακά, δηλαδή:

$$A \simeq B$$

ή, ισοδύναμα για τα σήματα $x(t)$ και $y(t)$:

$$\begin{aligned} A\left[x(t)\right] &\simeq B\left[x(t)\right] \\ y_{\text{analog}}(t) &\simeq y_{\text{digital}}(t) \end{aligned}$$

Στο μάθημα θα ασχοληθούμε μόνο με **διακριτά**, όχι αυστηρά ψηφιακά σήματα. Παρακάτω στις σημειώσεις οι δύο όροι συχνά θα χρησιμοποιούνται εναλλάξ, αλλά θα αναφέρονται πάντα στο απλώς *διακριτό* σήμα.

1.1 Ιδιότητες

Όταν μιλάμε για διακριτό σήμα, μιλάμε ουσιαστικά για μία ακολουθία, όπως τη γνωρίζουμε από τα μαθηματικά.

Πράξεις Οι πράξεις σημάτων ορίζονται όπως και στις ακολουθίες. Ασχολούμαστε με τιμές ίδιων **δεικτών** (indices) n:

1. **Πρόσθεση**: $x(n) + y(n) = z(n)$
2. **Πολλαπλασιασμός ακολουθιών**: $x(n) \cdot y(n) = z(n)$
3. **Πολλαπλασιασμός αριθμού-ακολουθίας**: $a \in \mathbb{R},\ z(n) = a \cdot x(n)$

Άθροισμα γεωμετρικής προόδου Η γεωμετρική πρόοδος έχει σημαντική θέση στην ψηφιακή επεξεργασία σήματος (αφού στο αναλογικό σήμα είχαμε το σημαντικό $e^{j\omega t}$, εδώ είναι σημαντικό το $e^{j\omega n}$ που εκφράζει συνεχή πολλαπλασιασμό με το $e^{j\omega}$):

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-a} & , \quad |a| < 1 \\ \text{αποκλίνει} & , \quad |a| > 1 \end{cases}$$

(για $a = 1$ αποκλίνει, και για $a = -1$ ταλαντεύεται. Επίσης, η παραπάνω σχέση ισχύει και για $a \in \mathbb{C}$).

Προσοχή ότι η παραπάνω σχέση ισχύει μόνο όταν το n ξεκινάει από το 0. Για παράδειγμα, $\sum_{n=1}^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1$.

Για **πεπερασμένο αριθμό όρων**:

$$\sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1-a}$$

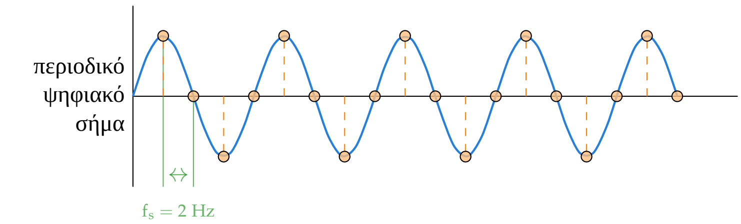
1.1.1 Χρήσιμοι τύποι ακολουθιών

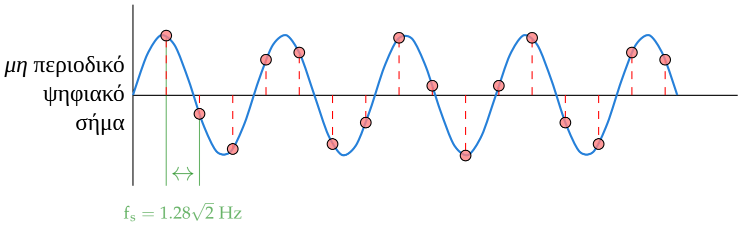
Περιοδική ακολουθία Η περιοδική ακολουθία περιέχει όρους που επαναλαμβάνονται, όπως και μία περιοδική συνάρτηση. Μαθηματικά:

$$\exists N \in \mathbb{Z} :\ \forall n \in \mathbb{Z} :\ x(n) = x(n+N)$$

δηλαδή η περιοδική μας ακολουθία έχει μια **περίοδο** $\mathbb{N}$ που είναι ακέραιος αριθμός.

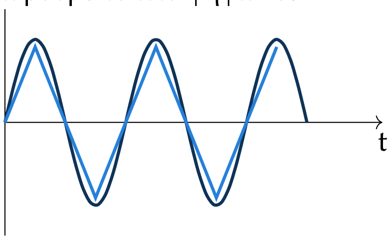
Προσοχή! Δεδομένου ότι η $\cos(\omega t)$ είναι *περιοδική*, θα μπορούσε κάποιος να φαντασεί ότι και η $\cos(\omega n)$ είναι *περιοδικό διακριτό σήμα*. Αν το δούμε μαθηματικά: Έστω $\exists N \in \mathbb{Z} :\ \cos(\omega n) = \cos\left(\omega(n+N)\right) \implies \omega n = \omega n + \omega N + k\pi \implies N = \frac{\pi}{\omega} \notin \mathbb{Z}$.





Πρακτικά, δειγματοληπτούμε σε διαφορετικά σημεία, άσχετα ίσως από την περίοδο του σήματος. Γενικότερα, όταν δειγματοληπτούμε περιοδικά αναλογικά σήματα, δεν θα παίρνουμε πάντα περιοδικά διακριτά πίσω.

Μάλιστα, κάτι άλλο περίεργο όταν δειγματοληπτούμε είναι πως για διαφορετικά αναλογικά σήματα, μπορεί να πάρουμε το ίδιο ψηφιακό!



Στο παραπάνω σχήμα, δειγματοληπτώντας στις κορυφές και στα μηδενικά, θα πάρουμε το ίδιο πράγμα από τα δύο σήματα.

Άρτιες & Περιττές ακολουθίες

$$\begin{aligned} \text{άρτια (even)} \quad & \forall n \in \mathbb{Z}\; x_e(n) = x_e(-n) \\ \text{περιττή (odd)} \quad & \forall n \in \mathbb{Z}\; -x_o(n) = x_o(-n) \end{aligned}$$

Μπορούμε να μετατρέψουμε οποιαδήποτε ακολουθία σε ένα άρτιο και ένα περιττό μέρος:

$$\begin{aligned} x_e(n) &= \frac{x(n) + x(-n)}{2} \\ x_o(n) &= \frac{x(n) - x(-n)}{2} \end{aligned}$$

1.1.2 Χαρακτηριστικά Μεγέθη

1. **Μέση τιμή**: $\overline{x(n)} = \dfrac{\sum\limits_{n=0}^{N} x(n)}{N+1}$
2. **Ενεργός τιμή**: $\overline{\overline{x(n)}} = \left[\dfrac{\sum\limits_{n=0}^{N} x^2(n)}{N+1} \right]^{1/2}$
3. **Στιγμιαία ισχύς**: $p(n) = x^2(n)$

4. **Μέση Ισχύς**: $p = \overline{p(n)} = \dfrac{\sum\limits_{n=0}^{N} x^2(n)}{N+1}$

5. **Ενέργεια**: $W = \sum\limits_{n=0}^{N} x^2(n) = (N+1)p$

1.1.3 Χρήσιμες ακολουθίες

1) **Εκθετική ακολουθία**:

Εκθετική ακολουθία:

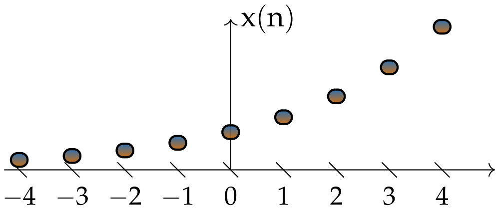
$$x(n) = Ae^{sn} = Aa^{(\sigma+j\omega)n}$$

για την οποία λαμβάνουμε τις εξής περιπτώσεις για τις σταθερές:

- $a = e$ και $s = \sigma < 0$:

$$x(n) = Ae^{-|\sigma|n}$$

(γεωμετρική πρόοδος με λόγο $e^{-|\sigma|}$)



- $a = e$ και $s = \pm j\omega$:

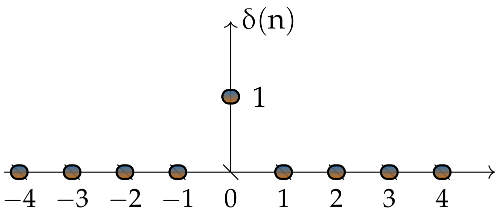
$$x(n) = A\left[\cos(\omega n) \pm j\sin(\omega n)\right]$$

Είναι περιοδική *μόνο* εάν $\frac{\pi}{\omega} \in \mathbb{Q}$

2) **Δέλτα του Kronecker**:

Δέλτα του Kronecker:

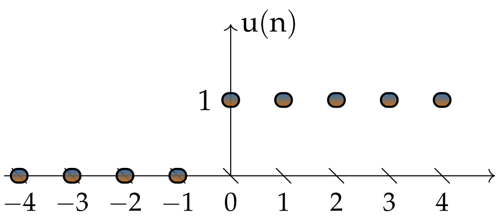
$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



3) **Βηματική ακολουθία step**:

Βηματική ακολουθία:

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



Μάλιστα, ισχύει ότι:

$$u(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta(m)$$

κάτι που μας θυμίζει αντίστοιχα από το αναλογικό σήμα ότι $u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau$

1.1.4 Συνέλιξη

Μπορούμε να μετατρέψουμε τη **συνέλιξη** του αναλογικού σήματος στο ψηφιακό.
Στο αναλογικό, θυμόμαστε ότι, σύμφωνα με τον ορισμό της συνέλιξης:

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau$$

και στο ψηφιακό, μπορούμε να έχουμε κάτι αντίστοιχο:

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) \tag{1}$$

Ορισμός 1.1: Συνέλιξη

Η **συνέλιξη** δύο διακριτών σημάτων ορίζεται ως εξής:

$$z(n) = x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k)$$

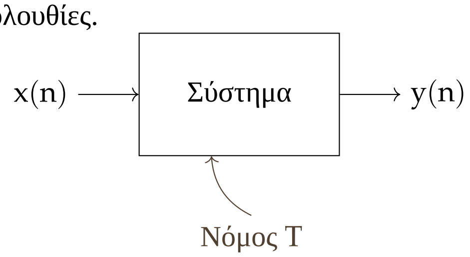
Απόδειξη σχέσης (1) Έχουμε:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{n-1} x(m)\cdot 0 + x(n)\cdot\delta(n-n) + \sum_{m=n+1}^{-\infty} x(m)\cdot 0 = x(m)$$

1.2 Συστήματα

Στον αναλογικό κόσμο, ένα σύστημα ήταν ένα κουτί που έπαιρνε σήματα εισόδου, τα επεξεργαζόταν, και έβγαζε σήματα εξόδου. Μαθηματικά, είναι μια απεικόνιση συναρτήσεων $x(t)$ εισόδου σε συναρτήσεις εξόδους.

Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε το **ψηφιακό σύστημα** ως ένα σύστημα που απεικονίζει ακολουθίες σε ακολουθίες.



Αντίστοιχα, ένα **υβριδικό σύστημα** απεικονίζει συναρτήσεις σε ακολουθίες. Δηλαδή έχει είσοδο αναλογικό σήμα, και έξοδο ψηφιακό.

Γραμμικό Σύστημα Μπορούμε σε αυτό το σημείο να δώσουμε τον ορισμό του **γραμμικού συστήματος** που συναντάμε συνέχεια, για ένα ψηφιακό σύστημα T. Έστω οι έξοδοι $y_1(n) = T\left[x_1(n)\right]$, $y_2(n) = T\left[x_2(n)\right]$. Το σύστημα είναι γραμμικό ανν:

$$\begin{aligned}&\forall x_1, x_2 \quad , \quad \forall a_1, a_2 \in \mathbb{C}:\\ &a_1 T\left[x_1(n)\right] + a_2 T\left[x_2(n)\right] = T\left[a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)\right]\end{aligned}$$

Παραδείγματα:

- Το $y(n) = ax(n) + b$ *δεν* είναι γραμμικό, λόγω του b.
- Το $y(n) = nx(n)$ *είναι* γραμμικό.

Αμετάβλητο Κατά τη Μετατόπιση Σύστημα (ΑΚΜ)

$$\begin{aligned} y(n) &= T\left[x(n)\right] \\ y(n-n_0) &= T\left[x(n-n_0)\right] \end{aligned}$$

δηλαδή, αν το ενοχλήσουμε τη στιγμή 2 ή τη στιγμή 50, θα δώσει την ίδια έξοδο, ξεκινώντας αντίστοιχα από τη στιγμή 2 ή τη στιγμή 50.

Παραδείγματα:

- Το $y(n) = ax(n) + b$ *είναι* είναι αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση.
- Το $y(n) = nx(n)$ *δεν* είναι αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση, λόγω του όρου n.

Το σύστημα που προκύπτει από μία διαφορική εξίσωση είναι αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση όταν οι συντελεστές των παραγώγων του δεν εξαρτώνται από το χρόνο.

Λίγη προσοχή Χρειάζεται κάποια προσοχή στο χειρισμό ΑΚΜ και γραμμικών συστημάτων.

Έστω τα συστήματα που εκφράζουν το νόμο του *Ohm* ($V = IR$) σε μια *αντίσταση*:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= R(t) \cdot x(t) \\ y_2(t) &= R(x) \cdot x(t) \end{aligned}$$

Στο πρώτο σύστημα η αντίσταση εξαρτάται από το χρόνο (π.χ. διάβρωση), και στο δεύτερο εξαρτάται από την είσοδο (π.χ. αύξηση θερμοκρασίας $\implies$ αλλαγή αντίστασης για μεγαλύτερα ρεύματα).

Το πρώτο σύστημα είναι γραμμικό αλλά *όχι* ΑΚΜ, αφού η $R(t)$ εξαρτάται από το χρόνο. Το δεύτερο σύστημα είναι ΑΚΜ αλλά *όχι* γραμμικό, αφού η $R(x)$ εξαρτάται από την είσοδο.

Είναι **λάθος** να πούμε πως έστω $R(t) = x(t) \implies y_1(t) = x^2(t)$ (μη γραμμικό), καθώς η $R(t)$ είναι μια παράμετρος του συστήματος που δεν μπορεί να είναι ίση με τις διαφορετικές πιθανές εισόδους του. Παρομοίως, είναι *λάθος* να θεωρήσουμε ότι $R(x) = R(x(t)) = R(t) \implies y_2(t) = R(t)x(t)$ (μη ΑΚΜ) (δηλαδή ότι αφού η R εξαρτάται από το x και το x εξαρτάται από το χρόνο, άρα η R εξαρτάται μόνο από το χρόνο).

Διάλεξη 2η
5/10/2018

Πιο αυστηρά, ένα σύστημα $y(n) = T\left[x(n)\right]$ είναι μία **απεικόνιση** από το σύνολο όλων των ακολουθιών $x(n) \in \mathbb{R}$ (ή $\mathbb{C}$) στο σύνολο όλων των ακολουθιών $y(n) \in \mathbb{R}$ (ή $\mathbb{C}$)

1.2.1 Συνέλιξη

Θυμόμαστε ότι ένα *ψηφιακό* σήμα είναι ίσο με την *ψηφιακή* συνέλιξή του με την $\delta(n)$ (1):

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

Άρα, εφαρμόζοντας το σύστημα στη παραπάνω σχέση:

$$y(n) = T\left[x(n)\right] = T\left[x(k)\delta(n-k)\right]$$

Και, αν το T είναι **γραμμικό**:

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} T\left[x(k)\delta(n-k)\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot T\left[\delta(n-k)\right] \end{aligned}$$

Δηλαδή η **έξοδος** του συστήματος σε κάποια είσοδο $x(n)$ είναι προκύπτει από τη συνέλιξη της εισόδου με την **κρουστική απόκριση** του συστήματος (απόκριση στη $\delta(n)$), την οποία ορίζουμε:

Κρουστική απόκριση: Έστω ότι δίνουμε σε ένα σύστημα είσοδο το δέλτα του Kronecker $\delta(n)$. Τότε η έξοδός του $T\left[\delta(n)\right]$ είναι η κρουστική απόκριση, την οποία ονομάζουμε $h(n)$:

$$h(n) = T\left[\delta(n)\right]$$

Μάλιστα, αν θεωρήσουμε ότι το σύστημα είναι ΑΚΜ, ισχύει ακόμα:

$$h(n-k) = T\left[\delta(n-k)\right]$$

άρα το παραπάνω σύστημα γράφεται:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot h(n-k)$$

Συμπέρασμα

Αν ένα σύστημα $T : x(n) \to y(n)$ είναι γραμμικό, τότε ορίζω την έννοια της **κρουστικής απόκρισης** του t ως $h(n) = T\left[\delta(n)\right]$. Αν επιπροσθέτως το T είναι ΑΚΜ, τότε για οποιαδήποτε είσοδο $x(n)$ μπορώ να γράψω ότι η έξοδος θα δίνεται ως:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = x(n) * h(n) \quad \text{(συνέλιξη των διακριτών ακολουθιών)}$$

Ιδιότητες Οι ιδιότητες της διακριτής συνέλιξης είναι ίδιες με αυτές του πολλαπλασιασμού:

α) **Αντιμεταθετική**: $x(n) * y(n) = y(n) * x(n)$

β) **Προσεταιριστική**: $x_1 * (x_2 * x_3) = (x_1 * x_2) * x_3$

γ) **Επιμεριστική** με πρόσθεση: $x_1 * (x_2 + x_3) = x_1 * x_2 + x_1 * x_3$

δ) **Ουδέτερο στοιχείο** η $\delta(n)$:

$$x(n) * \delta(n) = x(n)$$

Χρήσιμες πληροφορίες

- Μπορούμε να πούμε ότι ένα ψηφιακό σήμα έχει **διάρκεια**.

  Αν *ξεκινάει* (πρώτο μη-0 στοιχείο) στο $n = D_1$ και *τελειώνει* (τελευταίο μη-0 στοιχείο) στο $n = U_1$, τότε μπορούμε να πούμε ότι έχει διάρκεια:

  $$T = U_1 - D_1 + 1$$

  (προσοχή στον όρο $+1$!)

- Έστω δύο σήματα:

  $$x_1(n) \text{ έχει διάρκεια } N_1$$
  $$x_2(n) \text{ έχει διάρκεια } N_2$$

  τότε η συνέλιξή τους έχει διάρκεια:

  $$T_3 = T_1 + T_2 - 1$$

Άσκηση για το σπίτι

Φανταστείτε ότι σας δίνονται αρχές U_1 και τέλη D_1. Για παράδειγμα, μια ακολουθία ξεκινά από το 1813 και τελειώνει στο 1980. Γνωρίζουμε ότι αν συνελίξουμε τέτοιες ακολουθίες μεταξύ τους, θα πάρουμε σήματα διάρκειας $T_3 = T_1 + T_2 - 1$.
Ζητείται να βρεθεί μια σχέση που, δεδομένων των U_1, U_2, D_1, D_2, να βρίσκει **από ποιό σημείο** U_3 ξεκινάει το αποτέλεσμα της συνέλιξης.

Η απάντηση θα είναι $U_3 = U_1 + U_2$ και $D_3 = D_1 + D_2$

Παραδείγματα

Άσκηση

Να συνελιχθούν οι συναρτήσεις:

$$\begin{aligned} x_1(n) &= \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) + 4\delta(n-3) \\ x_2(n) &= \delta(n+1) - 2\delta(n) + \delta(n-1) \end{aligned}$$

Λύση

Περιμένουμε η συνέλιξη, με βάση αυτά που είδαμε παραπάνω, να έχει διάρκεια:

$$4 + 3 - 1 = 6$$

Πραγματοποιούμε τους υπολογισμούς:

$$\begin{aligned} x_1 * x_2 &= x_1(n) * \big[\delta(n+1) - 2\delta(n) + \delta(n+1)\big] \\ &= x_1(n) * \delta(n+1) - x_1(n) * \big(2\delta(n)\big) + x_1(n) * \delta(n-1) \\ &= x_1(n+1) - 2x_1(n) + x_1(n-1) \\ &= \delta(n+1) + 2\delta(n) + 3\delta(n-1) + 4\delta(n-2) - 2\delta(n) - 4\delta(n-1) \\ &\quad - 6\delta(n-2) - 8\delta(n-3) + \delta(n-1) + 2\delta(n-2) + 3\delta(n-3) + 4\delta(n-4) \\ &= \delta(n+1) - 5\delta(n-3) + 4\delta(n-4) \end{aligned}$$

κάτι που όντως έχει διάρκεια 6.

Άσκηση

Έστω ότι έχουμε συναρτήσεις που ξεκινούν και τελειώνουν σε διάφορα σημεία:

$$y(n) = \begin{cases} \beta^{n-n_0} & n \geq n_0 \\ 0 & n < n_0 \end{cases} \qquad x(n) = \begin{cases} a^n & 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Να βρεθεί η συνέλιξή τους.

Λύση

Μπορούμε να γράψουμε τις παραπάνω συναρτήσεις απλούστερα, εκμεταλλευόμενοι τη **βηματική step function**:

$$\begin{aligned} y(n) &= \beta^{n-n_0} \cdot u(n-n_0) \\ x(n) &= a^n \cdot \big[u(n) - u(n-N-1)\big] \end{aligned}$$

(με *προσοχή* στον όρο -1 μέσα στη u)

Άρα η συνέλιξη βρίσκεται:

$$
\begin{aligned}
z(n) &= x(n) * y(n) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta^{n-n_0} u(n-n_0) a^n \left[u(n) - u(n-N-1)\right] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\beta^{k-n_0} u(k-n_0) \cdot a^{n-k} \left[u(n-k) - u(n-k-N-1)\right]\right] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta^{k-n_0} a^{n-k} u(k-n_0) u(n-k) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta^{k-n_0} u(k-n_0) a^{n-k} u(n-k-N-1) \\
&= \beta^{-n_0} a^n \sum_{k=n_0}^{n} \beta^k a^{-k} u(n-n_0) - \beta^{-n_0} a^n \sum_{k=n_0}^{n-N-1} \beta^k a^{-k} u(n-N-1-n_0)
\end{aligned}
$$

Προσπαθώντας να φτάσουμε έναν όρο γεωμετρικής προόδου, θα κάνουμε το άθροισμα να ξεκινάει από το 0:

$$
= a^n \beta^{-n_0} \left[\left(\frac{\beta}{a}\right)^{n_0} \sum_{k=0}^{n-n_0} \left(\frac{\beta}{a}\right)^k u(n-n_0) - \left(\frac{\beta}{a}\right)^{n_0} \sum_{k=0}^{n-n_0-N-1} \left(\frac{\beta}{a}\right)^k u(n-N-1-n_0) \right]
$$

και ήρθε η ώρα να εκμεταλλευτούμε τους τύπους αθροίσματος γεωμετρικής προόδου:

$$
= a^{n-n_0} \left[\frac{\left(\frac{\beta}{a}\right)^{n-n_0+1} - 1}{\frac{\beta}{a} - 1} u(n-n_0) - \frac{\left(\frac{\beta}{a}\right)^{n-N_0-1}}{\frac{\beta}{a} - 1} u(n-N-1-n_0) \right]
$$

Άσκηση

Έστω η ακολουθία:

$$x(n) = a^n \ \forall n$$

και οι $y(n),\ z(n)$ αυθαίρετες.

Να δειχθεί ότι:

$$\left[x(n)y(n)\right] * \left[x(n)z(n)\right] = x(n)\left[y(n) * z(n)\right]$$

Λύση

Το αριστερό μέλος της ζητούμενης σχέσης είναι:

$$\begin{aligned}
\big[x(n)y(n)\big] * \big[x(n)z(n)\big] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(k)x(n-k)z(n-k) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k y(k) a^{n-k} z(n-k) \\
&= a^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k)z(n-k) \\
&= x(n) \cdot \big[y(n) * z(n)\big]
\end{aligned}$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί η ενέργεια και η ισχύς του σήματος:

$$x_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

Λύση

Η ενέργεια δίνεται από τον τύπο:

$$\begin{aligned}
E_{x_1} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1^2(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} u(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \\
&= \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Έχουμε αποδείξει ότι το σήμα είναι σήμα ενέργειας, άρα σίγουρα δεν είναι σήμα ισχύος, δηλαδή η ισχύς του είναι:

$$P = 0$$

Εναλλακτικά, η ισχύς είναι η ενέργεια διά τη διάρκεια του σήματος, δηλαδή:

$$P = \frac{4/3}{\infty} = 0$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί η ενέργεια & η ισχύς του σήματος:

$$x_2(n) = e^{j\left(n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right)}$$

Λύση

Έχουμε:

$$E_{x_2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x_2(n)\right|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |1|^2 = \infty$$

Η ισχύς του σήματος είναι:

$$P_a = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \cancelto{1}{\left|x_2(n)\right|^2} = \lim_{N\to\infty} \frac{2N+1}{2N+1} = 1$$

Άσκηση

Δίνονται τα σήματα:

$$
\begin{aligned}
x(n) &= 2^n u(-n-1) \\
y(n) &= 4^n u(-n-1)
\end{aligned}
$$

Να βρείτε τη συνέλιξή τους:

$$x(n) * y(n) = z(n)$$

Λύση

Έχουμε:

$$
\begin{aligned}
z(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) y(n-k) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k u(-k-1) 4^{n-k} u\left(-(n-k)-1\right) \\
&= 4^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{2}{4}\right)^k u(-k-1) u(-n-1+k) \\
&= 4^n \sum_{k=n+1}^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k u(-1-n-1) \\
&= 4^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{-n-2} \left(\frac{1}{2}\right)^k u(-1-n-1) \\
&= 4^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-n-1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} u(-n-2) \\
&= \left(2^n - 2^{2n+1}\right) u(-n-2)
\end{aligned}
$$

Άσκηση για το σπίτι

Να γίνει η συνέλιξη των δύο ακολουθιών:

$$
\begin{aligned}
x(n) &= u(-n-1) \\
y(n) &= \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)
\end{aligned}
$$

Διάλεξη 3η
8/10/2018

1.2.2 Ευστάθεια

Την ευστάθεια μπορούμε να την ορίσουμε με διαφορετικούς ασύμβατους τρόπους.

Εμείς θα χρησιμοποιούμε την **ευστάθεια κατά ΦΕΦΕ (Φραγμένη Είσοδος – Φραγμένη Έξοδος)** (BIBO — Bounded Input – Bounded Output).

Ορισμός 1.2: Φραγμένη ακολουθία

Μια **φραγμένη** ακολουθία $x(n)$είναι αυτή που δεν πιάνει τιμές μέχρι το άπειρο:

$$\left|x(n)\right| < M < \infty \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Ορισμός 1.3: Ευστάθεια συστήματος κατά ΦΕΦΕ

Αν $\forall x(n)$ φραγμένη είσοδο, η έξοδος $y(n)$ ενός συστήματος είναι **φραγμένη**, τότε το σύστημα είναι **ευσταθές κατά ΦΕΦΕ (BIBO)**.

Θεώρημα 1.2: Πόρισμα

Αν το σύστημα γνωρίζουμε ότι είναι *γραμμικό* και *ΑΚΜ* (άρα $\exists\, h(n)$, δηλαδή υπάρχει η κρουστική του απόκριση), τότε το σύστημα είναι **ευσταθές** ανν

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

Απόδειξη Για τις δύο κατευθύνσεις:

- Εξετάζω ότι $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \implies$ ευστάθεια κατά BIBO:

  Αφού το άθροισμα της κρουστικής απόκρισης είναι φραγμένο, θα ισχύει $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < L$ για κάποιο (μεγάλο) L.

  Έστω $x(n)$ φραγμένη είσοδος $\iff |x(n)| < M\ \forall n$, η έξοδος θα είναι:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$
$$\implies |y(n)| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)\right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|\,|x(n-k)|$$
$$\implies |y(n)| < M \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(n)| = N$$

  Άρα $|y(n)| < N$, άρα η έξοδος είναι φραγμένη.

- Εξετάζω ότι BIBO $\implies \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$.

  Εναλλακτικά θα εξετάσω το *αντιθετοαντίστροφο*, δηλαδή ότι $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \infty \implies$ όχι BIBO

  Ορίζω μία νέα ακολουθία $x(n)$ ως εξής:

$$x(n) = \begin{cases} \frac{h^*(-n)}{|h(-n)|} & \text{αν } h(-n) \neq 0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

  Η $x(n)$ είναι φραγμένη, αφού έχει μοναδιαίο ή μηδενικό μέτρο παντού. Επομένως είναι *φραγμένη*. Θα την πετάξουμε ως είσοδο στο σύστημα για να αποδείξουμε ότι αυτό δίνει **μη φραγμένη έξοδο, για φραγμένη είσοδο**, άρα είναι αυτό ασταθές κατά BIBO:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{h(k)h^*(k-n)}{|h(k-n)|}$$

  Θέτουμε συγκεκριμένα $y = 0$:

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{h(k)h^*(k)}{|h(k)|} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \infty.$$

1.2.3 Αιτιατότητα

Ορισμός 1.4: Αιτιατό σύστημα

Ένα σύστημα είναι **αιτιατό** αν η έξοδος εξαρτάται μόνο από **παρελθούσες τιμές** της εισόδου ή/και την τρέχουσα (παρούσα).
Μαθηματικά:

$$y(n) = f\left(x(k), x(\lambda), x(\xi), \ldots, x(p)\right)$$

όπου $\kappa, \lambda, \xi, \ldots, p \leq n$

Θεώρημα 1.3

Ένα γρ. ΑΚΜ σύστημα θα είναι **αιτιατό** αν:

$$h(n) = 0 \; \forall n < 0$$

δηλαδή αν η κρουστική απόκριση είναι **αιτιατή ακολουθία**.

Απόδειξη Η έξοδος του συστήματος θα είναι:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

Εμείς θέλουμε ο δείκτης του x να μην είναι ποτέ *μεγαλύτερος* από το n, διότι σε αυτήν την περίπτωση η έξοδος θα εξαρτιόταν από το *μέλλον* του $x(n)$. Δηλαδή το $y(n)$ θα εξαρτάται από τα $x(n+1), x(n+2), \ldots$. Άρα θέλουμε $k > 0$.

Αυτό εξασφαλίζεται όταν $h(k) = 0 \; \forall k < 0$. Τότε η έξοδος θα είναι:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

Το παραπάνω βέβαια, δεδομένου του ορισμού της συνέλιξης, γράφεται και ως εξής:

$$\begin{aligned} y(n) &= h(n) * x(n) = x(n) * h(n) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)h(n-k) \end{aligned}$$

1.2.4 Μερικοί χρήσιμοι ορισμοί για ακολουθίες

α) **Αιτιατή ακολουθία:** $x(n) = 0 \quad \forall\, n < 0$

β) **Ακολουθία δεξιάς πλευράς:** $\exists\, M \in \mathbb{Z} : \; x(n) = 0 \quad \forall\, n < M$

γ) **Ακολουθία αντιαιτιατή:** $x(n) = 0 \quad \forall\, n \geq 0$

δ) **Ακολουθία αριστερής πλευράς:** $\exists\, M \in \mathbb{Z} : \; x(n) = 0 \quad \forall\, n > M$

ε) **Ακολουθία πεπερασμένης διάρκειας:** $\exists\, M, N \; M < N : \; \forall n < M$ ή $n > N : \; x(n) = 0$

Κάθε αιτιατή ακολουθία είναι δεξιάς πλευράς.

Κεφάλαιο 2 Συνεχής μετασχηματισμός Fourier διακριτού σήματος (Discrete-Time Fourier Transform)

2.1 Απόκριση γραμμικού ΑΚΜ συστήματος σε εκθετική είσοδο

Μελετάμε την απόκριση συστήματος σε είσοδο:

$$x(n) = a^n$$

όπου $a \in \mathbb{C}$.

Τότε η έξοδος είναι:

$$\begin{aligned} y(n) = h(n) * x(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)a^{n-k} \\ &= a^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)a^{-k} \\ &= x(n) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{h(k)a^{-k}}_{\text{αριθμός που δεν εξαρτάται από το } n} \\ &= x(n) \cdot H \end{aligned}$$

Το τελικό αποτέλεσμα δηλαδή θα είναι η είσοδος **πολλαπλασιασμένη με έναν αριθμό** που εξαρτάται από την κρουστική απόκριση του συστήματος και τη βάση a της εισόδου.

- Έστω ότι:

  $$\boxed{a = e^{j\omega}} \implies x(n) = e^{j\omega n}$$

  για $\omega \in \mathbb{R}$ μία συνεχή μεταβλητή.

  Άρα η έξοδος θα είναι:

  $$y(n) = x(n) \cdot \boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k}}$$

  το πλαίσιο είναι ουσιαστικά μία συνάρτηση που εξαρτάται από το $e^{j\omega}$, ή πρακτικά μόνο από το ω. Ονομάζουμε αυτήν τη συνάρτηση $H(\omega)$:

  $$H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k}$$

  αυτή ουσιαστικά είναι η **απόκριση συχνότητας του συστήματος**.

  Υπενθυμίζουμε ότι το ω είναι **συνεχής μεταβλητή**. Μπορούμε να ορίσουμε έναν συνεχή μετασχηματισμό Fourier ως εξής:

  $$x(n) \to X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

- Έστω ότι:

  $$\boxed{a = z}$$

δηλαδή το a ανήκει οπουδήποτε στο μιγαδικό επίπεδο Τότε:

$$y(n) = x(n) \cdot \boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{-k}}$$

Ορισμός 2.1: Απόκριση συχνότητας

Ως **απόκριση συχνότητας** του συστήματος ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$\begin{aligned} H\left(e^{j\omega}\right) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k} \\ &= H_R\left(e^{j\omega}\right) + jH_I\left(e^{j\omega}\right) \\ &= \underbrace{\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|}_{\text{απόκριση πλάτους}} \exp \underbrace{\left[j\arg\left(H\left(e^{j\omega t}\right)\right)\right]}_{\text{απόκριση φάσης}} \end{aligned}$$

2.1.1 Απόκριση συστήματος σε ημιτονοειδείς συναρτήσεις

Έστω η είσοδος:

$$x(n) = A\cos\left(\omega_0 n + \phi\right)$$

Υπενθυμίζουμε ότι η είσοδος εν γένει **δεν είναι περιοδική**.
Αντικαθιστούμε το συνημίτονο:

$$x(n) = A\frac{e^{j\phi}e^{j\omega_0 n} + e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}}{2}$$

οπότε κατά τα παραπάνω, η έξοδος θα είναι:

$$y(n) = \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 n}H\left(e^{j\omega_0}\right) + \frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}H\left(e^{-j\omega_0}\right)$$

Εφ' όσον θεωρηθεί ότι $h(n) \in \mathbb{R}$, τότε θα ισχύει $H\left(e^{j\omega_0}\right) = H^*\left(e^{-j\omega_0}\right)$. Άρα τελικά:

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 n}\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\exp\left[j\arg\left(H\left(e^{j\omega_0}\right)\right)\right] + \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{-j\omega_0 n}\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\exp\left[-j\arg\left(H\left(e^{j\omega_0}\right)\right)\right] \\ &= A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\cos\left(\omega_0 n + \phi + \arg\left(H\left(e^{j\omega_0}\right)\right)\right) \end{aligned}$$

Άσκηση

Να βρεθεί η απόκριση συχνότητας του συστήματος με μοναδιαία απόκριση $h(n) = a^n u(n)$ για $|a| < 1$.

Λύση

Εύκολα φαίνεται ότι το σύστημα είναι αιτιατό και ευσταθές.

Για την απόκρισή του, από τον ορισμό της έχουμε:

$$\begin{aligned} H\left(e^{j\omega}\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(ae^{-j\omega}\right)^n \end{aligned}$$

Σε αυτό το σημείο εκμεταλλευόμαστε το άθροισμα άπειρων όρων γεωμετρικής προόδου:

$$= \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \quad (\text{επειδή } \left|ae^{-j\omega}\right| = |a| < 1)$$

Άρα η απόκριση πλάτους & συχνότητας θα είναι:

$$\begin{aligned} \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| &= \frac{1}{\left(1 + a^2 - 2a\cos\omega\right)^{1/2}} \\ \arg\left(H\left(e^{j\omega}\right)\right) &= -\arctan\left(\frac{a\sin\omega}{1 - a\cos\omega}\right) \end{aligned}$$

Άσκηση

Δίνεται γρ. ΑΚΜ σύστημα με:

$$h(n) = \frac{1}{2}\delta(n) + \delta(n-1) + \frac{1}{2}\delta(n-2)$$

Να χαρακτηριστεί και να βρεθεί η απόκριση συχνότητάς του.

Λύση

Το σύστημα είναι αιτιατό & ευσταθές.
Σύμφωνα με τον ορισμό, έχουμε:

$$\begin{aligned} H\left(e^{j\omega}\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2}\delta(n) + \delta(n-1) + \frac{1}{2}\delta(n-2)\right] e^{-j\omega n} \\ &= \frac{1}{2}e^{-j\omega 0} + e^{-j\omega 1} + \frac{1}{2}e^{-j\omega 2} \\ &= e^{-j\omega}\left[\frac{1}{2}e^{j\omega} + 1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right] \\ &= e^{-j\omega}(1 + \cos\omega) \end{aligned}$$

Άρα σε πλάτος και φάση:

$$\begin{aligned} \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| &= |1 + \cos\omega| = 1 + \cos\omega \\ \arg\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right] &= \arg\left[e^{-j\omega(1+\cos\omega)}\right] = \arg\left[e^{-j\omega}\right] + \underbrace{\arg\left[1 + \cos\omega\right]}_{\text{επειδή } 1+\cos\omega \geq 0} = -\omega + 0 = -\omega \end{aligned}$$

Διάλεξη 4^{η} 12/10/2018

2.2 Μετασχηματισμός Fourier

Παραπάνω ορίσαμε το συνεχή μετασχηματισμό Fourier στο διακριτό σήμα ως εξής:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$$

και, αν το σύστημα είναι ευσταθές κατά BIBO, έχουμε:

$$\begin{aligned} h(n) \text{ ευσταθές } &\iff \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|h(n)\right| < \infty \\ &\iff \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|h(n)\right| \left|e^{-j\omega n}\right| < \infty \\ &\iff \left|h(n)e^{-j\omega n}\right| < \infty \implies \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} < \infty \implies \exists\, H\left(e^{j\omega}\right) \end{aligned}$$

Πρακτικά, διαπιστώνουμε ότι *αν το σύστημα είναι ευσταθές*, τότε *το σύστημα έχει απόκριση συχνότητας*, δηλαδή ορίζεται ο μετασχηματισμός Fourier του.

Ένα ερώτημα που προκύπτει είναι αν ισχύει το αντίστροφο, δηλαδή αν η ύπαρξη του $H\left(e^{j\omega}\right) \implies$ ότι το σύστημα είναι *ευσταθές*. Για να το διαπιστώσουμε αυτό, θεωρούμε ένα αντιπαράδειγμα (*χαμηλοπερατού φίλτρου*): $H\left(e^{j\omega}\right) \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

Το παραπάνω σύστημα **δεν είναι ευσταθές**! Πράγματι, η αντίστοιχη κρουστική απόκρισή του είναι $h(n) = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$. Το σύστημα δεν είναι αιτιατό (αφού $h(n) \neq 0 \iff n < 0$), και το άθροισμα $S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\frac{\sin \omega_c n}{\pi n}\right|$ τείνει στο ∞.

Επομένως, η ύπαρξη του μετασχηματισμού Fourier *δεν* συνεπάγεται την ευστάθεια του συστήματος.

2.2.1 Ιδιότητες της απόκρισης συχνότητας

Ο *συνεχής* μετασχηματισμός Fourier στο διακριτό σήμα:

1. Είναι συνάρτηση **συνεχούς** μεταβλητής $\omega \in (-\infty, \infty)$
2. Η $H\left(e^{j\omega}\right)$ είναι **περιοδική** με περίοδο 2π.

Επιπλέον, αν για το αρχικό σήμα στο χρόνο ισχύει $h(n) \in \mathbb{R}$:

3 Η $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$ είναι **άρτια** συνάρτηση του ω και συμμετρική ως προς τον άξονα $\omega = \pi$.

4 Το $\arg H\left(e^{j\omega}\right)$ είναι **περιττή** συνάρτηση του ω και αντισυμμετρική ως προς τον άξονα $\omega = \pi$.

Άσκηση για το σπίτι

Να αποδειχθούν οι ιδιότητες **3**, **4**.

Άσκηση

Να βρεθεί ο συνεχής Μ/Σ Fourier της:

$$h(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n < N \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Λύση

Η δοθείσα συνάρτηση γράφεται απλούστερα ως:

$$h(n) = u(n) - u(n-N)$$

Επομένως μπορούμε να υπολογίσουμε αναλυτικά το μετασχηματισμό της:

$$\begin{aligned} H\left(e^{j\omega}\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} 1e^{-j\omega n} \\ &= \frac{1-e^{-j\omega n}}{1-e^{-j\omega}} \\ &= \frac{e^{-j\omega N/2}\left(e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2}\right)}{e^{-j\omega/2}\left(e^{j\omega/2}\right) - e^{-j\omega/2}} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \end{aligned}$$

Άρα:

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|\frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right|$$

$$\arg\left(H\left(e\right)\right) = \operatorname{atan2}\left(0, \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right)$$

5. Μπορούμε να χωρίσουμε κάθε απόκριση συχνότητας σε ένα περιττό και ένα άρτιο κομμάτι:

   $$h(n) = h_o(n) + h_e(n)$$

   όπου $h_o(n) = j\,\mathrm{Im}\left\{H\left(e^{j\omega}\right)\right\}$ και $h_e = \mathrm{Re}\left\{H\left(e^{j\omega}\right)\right\}$

Μετασχηματισμός σήματος Ακριβώς όπως ορίσαμε το μετασχηματισμό της κρουστικής απόκρισης, μπορούμε να μετασχηματίσουμε και την είσοδο $x(n)$:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

Τότε, μπορούμε δοθέντος του συνεχούς Μ/Σ Fourier ενός σήματος, να γυρίσουμε πίσω στο ίδιο το σήμα:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{-j\omega}\right)e^{j\omega n}\,d\omega$$

Εδώ δίνουμε προσοχή στο ότι **ολοκληρώνουμε** και δεν αθροίζουμε, αφού στο μετασχηματισμό αυτόν η συχνότητα είναι *συνεχής μεταβλητή*.

Απόδειξη Έχουμε:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j\omega k} \implies$$

$$X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{j\omega(n-k)}$$

$$\implies \int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}\,d\omega = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-k)}\,d\omega = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)2\pi\delta(n-k) = 2\pi x(n).$$

Θεώρημα Parseval

Θεώρημα 2.1: Parseval's Theorem

Το θεώρημα του Parseval συνδέει την **ενέργεια** του σήματος με το Μ/Σ Fourier του:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right)X^*\left(e^{j\omega}\right)d\omega$$

Άσκηση για το σπίτι

Να αποδειχθεί το θεώρημα του Parseval.

Πολλαπλασιασμός & Συνέλιξη

Θεώρημα 2.2

Η **συνέλιξη** στο χρόνο είναι **πολλαπλασιασμός** στη συχνότητα του DTFT:

$$x(k) * h(k) \leftrightarrow X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)$$

Απόδειξη Έχουμε:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)x(k) \implies$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega n}\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)x(k) \implies$$

$$\begin{aligned}
Y\left(e^{j\omega}\right) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega n}h(n-k) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j\omega k}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega(n-k)}h(n-k) \\
&= X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)
\end{aligned}$$

Κεφάλαιο 3 Μετασχηματισμός Z

Ο **μετασχηματισμός Z** είναι μια επέκταση του μετασχηματισμού Fourier στον διακριτό κόσμο, που θα μπορούσε να μοιάσει με το μετασχηματισμό Laplace στο συνεχές σήμα.

Θυμόμαστε ότι η έξοδος ενός συστήματος είναι:

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

και για μία είσοδο εκθετικής μορφής:

$$x(n) = a^n$$

η έξοδος θα είναι:

$$y(n) = a^n \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)a^{-k}}_{H(a)}$$

ή, θεωρώντας ότι το a είναι κάποιο μιγαδικό z:

$$y(n) = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{-k}$$

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε το μετασχηματισμό Z ως εξής:

Ορισμός 3.1: Μετασχηματισμός Z

Ο μετασχηματισμός Z μιας συνάρτησης $x(n)$ ορίζεται ως εξής:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

Για να έχει νόημα ο παραπάνω ορισμός, πρέπει να συγκλίνει το εξής άθροισμα:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x(n)z^{-n} \right| < \infty$$

ή, ισοδύναμα:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|\, |z|^{-n} < \infty$$

Αυτό που καθορίζει το αν θα συγκλίνουμε είναι το μέτρο $|z|$. Οι περιοχές ίσου μέτρου ορίζουν κύκλους ή donuts στο μιγαδικό επίπεδο του z:

Από τη μιγαδική ανάλυση αποδεικνύεται πως η περιοχή σύγκλισης δεν μπορεί να έχει κάποια άλλη περίεργη μορφή:

Επομένως, για το $|z|$ θα ισχύει $D < |z| < U$ για κάποια D, U. Αυτά ορίζουν το **ROC** (Region Of Convergence) του μετασχηματισμού Z, χωρίς το οποίο ο μετασχηματισμός δεν έχει νόημα.

Άσκηση

Να βρεθεί ο Z μετασχηματισμός του $x(n) = a^n u(n)$.

Λύση

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n \\
&= \frac{1}{1-\frac{a}{z}} = \frac{z}{z-a} \qquad \text{αν} \left|\frac{a}{z} = 1\right|
\end{aligned}
$$

Άρα γράφουμε συμβολικά:

$$
x(n) = a^n u(n) \xrightarrow{ZT} X(z) = \frac{z}{z-a} \qquad \text{ROC} : |z| > |a|
$$

Άσκηση

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Z του $x(n) = -a^n u(-n-1)$.

Λύση

Έχουμε:

$$
X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -\left(\frac{a}{z}\right)^n
$$

Προσπαθώ να ξεκινήσω την άθροιση από το 0 για να εφαρμόσω τύπο γεωμετρικής προόδου:

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{a}{z}\right)^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^n \\
&= 1 - \frac{1}{1-\frac{z}{a}} \qquad \left|\frac{z}{a}\right| < 1 \\
&= \frac{1-\frac{z}{a}-1}{1-\frac{z}{a}} = \frac{-\frac{z}{a}}{1-\frac{z}{a}} = \frac{-z}{a-z} = \frac{z}{z-a}
\end{aligned}
$$

Εδώ παρατηρούμε κάτι ενδιαφέρον: Ο τύπος του μετασχηματισμού Z είναι **ακριβώς ίδιος** με αυτόν της προηγούμενης άσκησης, παρ' όλο που προέρχονται από διαφορετικές συναρτήσεις. Η διαφορά εδώ βρίσκεται στην **περιοχή σύγκλισης** (ROC), που είναι διαφορετική στις δύο ασκήσεις. Εδώ φαίνεται και η σημασία του δεδομένου της περιοχής σύγκλισης.

Άσκηση

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Z της συνάρτησης:

$$
x(n) = a^n u(n) - b^n u(-n-1)
$$

Λύση

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[a^n u(n) - b^n u(-n-1)\right] z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} - \sum_{n=-\infty}^{-1} b^n z^{-n} \\
&= \frac{z}{z-a} + \frac{z}{z-b} \qquad \text{για } |z| > |a| \text{ και } |z| < |b|
\end{aligned}$$

Η $X(z)$ υπάρχει αν υπάρχει η περιοχή σύγκλισης (ROC): $|a| < |z| < |b|$. Για να συμβαίνει αυτό, πρέπει να ισχύει η συνθήκη $|a| < |b|$. Διαφορετικά, δεν υπάρχει ο μετασχηματισμός.

3.1 Περιοχή σύγκλισης

- Για **ακολουθίες δεξιάς πλευράς**
  ($x(n) = 0 \impliedby n < n_0$), αν $n_0 \geq 0$, η περιοχή σύγκλισης είναι:

  $$|z| > |z_1|$$

  Απόδειξη Ο μετασχηματισμός Z της ακολουθίας θα είναι:

  $$\sum_{n=n_0\geq 0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

  Υποθέτουμε ότι συγκλίνει για κάποιο $|z| = |z_1|$ Θέλουμε η σειρά $\sum_{n=n_0\geq 0}^{\infty} \left|x(n)z_1^{-n}\right| < \infty$ να συγκλίνει.

  $$|z| > |z_1| \implies |z|^{-n} < |z_1|^{-n}$$

  αν $n \geq 0$.

  Αν αντίθετα, $n_0 < 0$:

  $$\sum_{n=n_0}^{\infty} \cdots = \sum_{n=n_0}^{-1} \cdots + \sum_{n=0}^{\infty}$$

  που οδηγεί σε ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα, πλην του κύκλου στο άπειρο:

  $$|z_1| < |z| < \infty$$

- Για **ακολουθίες αριστερής πλευράς** ($x(n) = 0 \impliedby n > n_0$), τότε (αντίστοιχα με παραπάνω):

  $$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_0} x(n)z^{-n}$$

  Τότε θα ισχύει:

  $$\begin{cases} n_0 \leq 0 \implies \text{ROC} = |z| < |z_1| \\ n_0 > 0 \implies \text{ROC} = 0 < |z| < |z_1| \end{cases}$$

- Για **ακολουθίες πεπερασμένου μήκους** ($x(n) = 0 \; \forall \; n < N, n > M, M > N$), ο μετασχηματισμός Z θα είναι:

$$X(z) = \sum_{n=N}^{M} x(n) z^{-n}$$

Εδώ δεν έχουμε άπειρο άθροισμα. Κινδυνεύουμε με απειρισμούς μόνον όταν $z = 0$ ή $z = \infty$. Πιο συγκεκριμένα:

$$\begin{cases} \text{Αν } N < 0 \;\&\; M > 0 & \Longrightarrow \text{ROC: } 0 < |z| < \infty \\ \text{Αν } N > 0 \;\&\; M > 0 & \Longrightarrow \text{ROC: } 0 < |z| \\ \text{Αν } N < 0 \;\&\; M < 0 & \Longrightarrow \text{ROC: } |z| < \infty \end{cases}$$

Διάλεξη 5η
15/10/2018

3.2 Αντίστροφος μετασχηματισμός Z

Ο ευθύς μετασχηματισμός Z είναι:

$$X(z) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad \mathcal{R}_{x(z)}$$

Αποδεικνύεται ότι ο **αντίστροφος μετασχηματισμός Z** είναι:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{c \in \mathcal{R}_{x(z)z^{n-1}}} x(z) z^{n-1} \, dz$$

Η παραπάνω σχέση βασίζεται στο ολοκλήρωμα του Cauchy, $\frac{1}{2\pi j} \oint z^{k-1} \, dz = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$

3.3 Μέθοδοι υπολογισμού μετασχηματισμού Z

3.3.1 Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Με βάση τη μιγαδική ανάλυση, γνωρίζουμε ότι:

$$x(n) = \sum \left\{ \text{Res} \left[x(z) z^{n-1} \right] \right\}$$

για τους πόλους **εντός** του $C \in \mathcal{R}_{x(z)z^{n-1}}$.

Η παραπάνω σχέση συμπεριλαμβάνει και πόλους που βρίσκονται *εκτός των ορίων περιοχής σύγκλισης* αλλά *μέσα στα όρια του κύκλου που αυτές ορίζουν*.

Παράδειγμα Ένα σύστημα έχει 4 πόλους. Πόσες είναι οι μέγιστες δυνατές περιοχές σύγκλισης;

Απάντηση Ένας πόλος, ως *απομονωμένο* ανώμαλο σημείο, δεν μπορεί να βρίσκεται στην περιοχή σύγκλισης.

Τοποθετούμε τους πόλους στο πραγματικό επίπεδο για ευκολία, και θεωρούμε περιοχές σύγκλισης με ανοιχτά όρια. Επειδή μια περιοχή σύγκλισης πρέπει να έχει πόλο στα όριά της, αλλά δεν μπορεί να περιέχει πόλο, οι δυνατές επιλογές θα μοιάζουν ως εξής:

Άρα έχουμε 5 δυνατότητες για περιοχή σύγκλισης.

Υπολογισμός ολοκληρωτικών υπολοίπων Σύμφωνα με τη μιγαδική ανάλυση, τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα που ψάχνουμε μπορούν να βρεθούν ως εξής:

$$\text{Res}\left[X(z)z^{n-1} \text{ @ } z = z_0\right] = \frac{1}{(s-1)!}\left.\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}}A(z)\right|_{z=z_0}$$

όπου z_0 ο πόλος, s η πολλαπλότητά του, και:

$$A(z) = X(z)z^{n-1}(z-z_0)^s$$

Άσκηση

Δίνεται ο μετασχηματισμός Z μιας ακολουθίας:

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z| > |a|$$

Ποιά είναι η αρχική ακολουθία $x(n)$;

Λύση

Το $X(z)$ γράφεται και ως:

$$X(z) = \frac{z}{z-a}$$

Εξετάζω πόσο κάνει το $X(z)z^{n-1}$:

$$X(z)z^{n-1} = \frac{z^n}{z-a}$$

που έχει **πόλο** στο $z_0 = a$ με **πολλαπλότητα** $s_0 = 1$. Στην περίπτωση που $n = -k < 0$, προστίθεται και ένας παραπάνω πόλος $z_1 = 0$ πολλαπλότητας $s_1 = |n| = k$.

- **Αν** $n \geq 0$, τότε: έχουμε **1 πόλο** στο $z_0 = a$ πολλ/τας $s_0 = 1$. Άρα από τη θεωρία:

$$\begin{aligned} x(n) &= \text{Res}\left[\frac{z^n}{z-a} \text{ @ } z = a\right] = \frac{1}{(s-1)^1}\left.\frac{d}{d\,z^{-1}}z^n\right|_{z=a} \\ &= \cdots \end{aligned}$$

- **Αν** $n < 0$, τότε:

$$\begin{aligned} x(n) &= \text{Res}\left[\frac{1}{(z-a)z^{-n}} \text{ @ } z = a\right] = \left.\frac{1}{z^{-n}}\right|_{z=a} = a^n \\ &+ \text{Res}\left[\frac{1}{(z-a)z^{-n}} \text{ @ } z = 0\right] = \frac{1}{(k-1)!}\left.\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\frac{1}{z-a}\right|_{z=0} \\ &= a^n + \frac{1}{(k-1)!}(-1)^{k-1}\left.\frac{1}{(z-a)^k}\right|_{z=0} \\ &= a^n + (-1)^{k-1}\frac{1}{(-a)^k} = a^n + (-1)^{k-1}(-a)^n = a^n - a^n = 0 \end{aligned}$$

Τελικά, το αποτέλεσμα στο οποίο καταλήξαμε είναι το εξής:

$$\left.\begin{array}{ll} n \geq 0 & x(n) = a^n \\ n < 0 & x(n) = 0 \end{array}\right\} \implies x(n) = a^n u(n)$$

ένα αποτέλεσμα ίδιο με αυτό της "αντίστροφης" άσκησης που λύσαμε προηγουμένως.

Άσκηση

Να βρεθεί το αρχικό σήμα του μετασχηματισμού:

$$X(z) = \frac{z(z-b) + z(z-a)}{(z-a)(z-b)} \qquad \mathcal{R}_x : |a| < |z| < |b|$$

Λύση

Αν και η άσκηση λύνεται άμεσα μετά την παρατήρηση ότι $X(z) = \frac{z}{z-a} + \frac{z}{z-b}$, εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τη μεθοδολογία των ολοκληρωτικών υπολοίπων.

Έχουμε:

$$X(z)z^{n-1} = \frac{(2z-a-b)}{(z-a)(z-b)}z^n$$

Άρα:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{(2z-a-b)}{(z-a)(z-b)}z^n\,dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_C I(z)\,dz$$

όπου ορίσαμε για ευκολία $I(z) = \frac{(2z-a-b)}{(z-a)(z-b)}z^n$.

Το $I(z)$ έχει πόλους z πολλαπλότητας s:

$$I(z) \to \begin{cases} z_0 = a & s_0 = 1 \\ z_1 = b & s_1 = 1 \end{cases}$$

- **Αν** $n \geq 0$, τότε:

  $$x(n) = \text{Res}\left[I(z) \,@\, z = a\right] = \left.\frac{z^n(2z-a-b)}{(z-b)}\right|_{z=a} = \frac{a^n(2a+a-b)}{(a-b)} = a^n$$

  Εδώ δεν συμπεριλάβαμε τον πόλο $z_1 = b$ επειδή είναι *εκτός* του χωρίου που περικλείεται από την περιοχή σύγκλισης.

  Επομένως:

  $$x(u) = a^n \quad \text{όταν } n \geq 0$$

- **Αν** $n < 0$, τότε οι πόλοι του $I(z)$, λόγω του όρου z^n, είναι:

  $$I(z) \to \begin{cases} z_0 = a & s_0 = 1 \\ z_1 = b & s_1 = 1 \\ z_2 = 0 & s_2 = -n = k \end{cases}$$

  Άρα η ακολουθία είναι:

  $$x(n) = \text{Res}\left[I(z) \,@\, z = a\right] + \text{Res}\left[I(z) \,@\, z = 0\right]$$

  επειδή $a, 0 \in \text{int}(C)$, ενώ $b \notin \text{int}(C)$

  $$= \left.\frac{2z-a-b}{z^{-n}(z-b)}\right|_{z=a} + \frac{1}{(-n-1)!}\left.\frac{d^{-n-1}}{dz^{-n-1}}\left(\frac{2z-a-b}{(z-a)(z-b)}\right)\right|_{z=0}$$

Για να υπολογίσουμε τη "δύσκολη" παραπάνω παράγωγο, εφαρμόζουμε ένα τρικ. Θέτουμε $z = {}^1\!/\!\rho$, οπότε $dz = -\frac{1}{\rho z}\,d\rho$, και η περιοχή σύγκλισης γίνεται $|a|^{-1} > |\rho| > |b|^{-1}$. Και τότε:

$$\begin{aligned} I(z)\,dz &= -\frac{\rho^{-n}(2\rho^{-1} - a - b)}{\left(\rho^{-1} - a\right)\left(\rho^{-1} - b\right)}\frac{1}{\rho^2}\,d\rho \\ &= -\frac{\rho^{-n}(2\rho^{-1} - a - b)}{(1 - a\rho)(1 - b\rho)}\,d\rho \end{aligned}$$

Άρα τελικά:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \left[-\frac{\rho^{-n}(2\rho^{-1} - a - b)}{(1 - a\rho)(1 - b\rho)}\right] d\rho$$

Στο νέο υπολογισμό με βάση το ρ και όχι το z, έχει αλλάξει το επίπεδο όπου προβάλλουμε τους πόλους. Η περιοχή σύγκλισης μοιάζει πάλι με donut, αλλά η καμπύλη C διαγράφεται τώρα ωρολογιακά και όχι αντιωρολογιακά, λόγω της αλλαγής μεταβλητής $dz = -\frac{1}{\rho z}\,d\rho$.

Άρα:

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi j}\oint_C \left[\frac{\rho^{-n}(2\rho^{-1} - a - b)}{(1 - a\rho)(1 - b\rho)}\right] d\rho \\ &= \text{Res}\left[-\frac{\rho^{-n}(2\rho^{-1} - a - b)}{(1 - a\rho)(1 - b\rho)} \ @\ \rho = \frac{1}{b}\right] \\ &= \frac{1}{ab}\left[\frac{\rho^{-n-1}\left[2 - (a+b)\rho\right]}{\left(\rho - \frac{1}{a}\right)\left(\rho - \frac{1}{b}\right)}\right] \ @\ \rho = \frac{1}{b} \\ &= \frac{1}{ab}\left[\frac{\rho^{-n-1}\left(2 - (a+b)\rho\right)}{\left(\rho - \frac{1}{a}\right)}\right]\Bigg|_{\rho = {}^1\!/b} \\ &= \cdots = -b^n \end{aligned}$$

Άρα τελικά:

$$x(n) = -b^n \text{ για } n < 0$$

Επομένως, η ζητούμενη ακολουθία είναι:

$$x(n) = a^n u(n) - b^n u(-n-1)$$

3.3.2 Μέθοδος συνεχούς διαίρεσης

Άσκηση

Δίνεται ο Μ/Σ Ζ:

$$X(z) = \frac{2z^2 - (a+b)z}{z^2 - (a+b)z + ab} \qquad |a| < |b| < |z|$$

Να βρεθεί η $x(n)$.

Λύση

Η μέθοδος αυτή απαιτεί ένα είδος διαίρεσης των πολυωνύμων $2z^2-(a+b)z$ και $z^2-(a+b)z+ab$. Το πηλίκο θα προκύψει $2+(a+b)z^{-1}+(a^2+b^2)z^{-2}+(a^3+b^3)z^{-3}+\ldots$, κάτι που μοιάζει με τον ορισμό του μετασχηματισμού Z: $\sum x(n)z^{-n}$, επομένως η $x(n)=(a^n+b^n)\,u(n)$.

Αντίστοιχα, για περιοχή σύγκλισης $|z|<|a|<|b|$, θα βρίσκαμε $x(n)=-(a^n+b^n)\,u(-n-1)$. Όμως δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο αυτήν για περιοχές της μορφής $|a|<|z|<|b|$.

Διάλεξη 6η
19/10/2018

3.4 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Z

1) **Γραμμικότητα**

Έστω οι N σε πλήθος ακολουθίες $x_k(n)$ και οι μετασχηματισμοί Z τους:

$$x_k(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}T} X_k(z) \qquad k=1,2,\ldots,N$$

και έστω μία ακολουθία $y(n)$ που είναι γραμμικός συνδυασμός των παραπάνω:

$$y(n)=\sum_{k=1}^{N} a_k x_k(n) \qquad a_k\in\mathbb{C} \text{ σταθερές}$$

με μετασχηματισμό Z:

$$Y(z)=\sum_{k=1}^{N} a_k X_k(z)$$

ο οποίος έχει περιοχή σύγκλισης:

$$\mathcal{R}_{Y(z)} \supseteq \bigcap_{k=1}^{N} \mathcal{R}_{X_k(z)}$$

δηλαδή η *περιοχή σύγκλισης* του γραμμικού συνδυασμού είναι *τουλάχιστον* η τομή όλων των περιοχών σύγκλισης των επιμέρους ακολουθιών. Ο όρος *τουλάχιστον* (ή αντίστοιχα το σύμβολο $\supset$) εκφράζουν ότι η περιοχή σύγκλισης της $Y(z)$ μπορεί να είναι μεγαλύτερη των επιμέρους. Αυτό μπορεί για παράδειγμα να συμβαίνει όταν προσθέτουμε τις ακολουθίες με $\mathcal{Z}T$: $\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-1}=0$, ή τις ακολουθίες $\frac{z}{z-1}-\frac{1}{z-1}=\frac{z-1}{z-1}=1$ όπου απαλείφεται ο πόλος.

2) **Μετατόπιση**

Έστω η ακολουθία $x(n)$ και ο μετασχηματισμός της:

$$x(n)\xrightarrow{\mathcal{Z}T} X(z) \qquad \mathcal{R}_X$$

και έστω ότι τη μετατοπίζουμε κατά $n_0\in\mathbb{Z}$ (είναι απαραίτητο ο n_0 να είναι **ακέραιος**)

$$\boxed{y(n)=x(n-n_0)} \xrightarrow{\mathcal{Z}T} \boxed{z^{-n_0}X(z)}$$

Απόδειξη Έχουμε:

$$Y(z)=\mathcal{Z}T\left\{y(n)\right\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-n_0)z^{-n} \underset{n-n_0\leftarrow n}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-(n+n_0)}$$

$$=z^{-n_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}=z^{-n_0}X(z)$$

Η περιοχή σύγκλισης εξαρτάται από το ποιούς πόλους εξαφανίζει και εμφανίσει το z^{-n_0}

3) **Πολλαπλασιασμός με εκθετική ακολουθία (εκθετικό σήμα)**

Δίνεται η ακολουθία:

$$x(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}T} X(z) \qquad \mathcal{R}_x : r_- < |z| < z_+$$

και την πολλαπλασιάζουμε με ένα εκθετικό a^n όπου $a \in \mathbb{C}$:

$$\boxed{y(n) = a^n x(n)} \xrightarrow{\mathcal{Z}T} \boxed{Y(z) = X\left(\frac{z}{a}\right)}$$

Απόδειξη Έχουμε:

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

Για να εκτελέσουμε την τελευταία πράξη, πρέπει να ισχύει:

$$\left|\frac{z}{a}\right| \in \mathcal{R}_x \implies r_- < \left|\frac{z}{a}\right| < r_+ \implies \boxed{|a|r_- < |z| < |a|r_+}$$

4) **Παραγώγιση του μετασχηματισμού**

$$\boxed{nx(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}T} -z\frac{dX(z)}{dz}}$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}T\left\{nx(n)\right\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\left(-z\frac{dz^{-n}}{dz}\right) \\
&= -z\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}\right) = -z\frac{d}{dz}X(z)
\end{aligned}$$

5) **Χρονική αντιστροφή**

Για την ακολουθία $x(n)$:

$$x(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}T} X(z) \qquad \mathcal{R}_x : r_- < |z| < r_+$$

$$\boxed{y(n) = x(-n)} \xrightarrow{\mathcal{Z}T} \boxed{Y(z) = X(z^{-1})}$$

Απόδειξη Έχουμε:

$$\begin{aligned}
Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)z^{-n} \underset{-n\leftarrow n}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\left(z^{-1}\right)^{n} \\
&= X\left(z^{-1}\right)
\end{aligned}$$

Με την απαίτηση για το πεδίο σύγκλισης:

$$r_- < |z^{-1}| < r_+ \implies \boxed{\frac{1}{r_+} < |z| < \frac{1}{r_-}}$$

6) **Συνέλιξη στο χρόνο**

Έχουμε τη συνέλιξη δύο ακολουθιών x και y:

$$x(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}T} X(z), \qquad \mathcal{R}_x$$
$$y(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}T} Y(z), \qquad \mathcal{R}_y$$
$$\boxed{w(n) = x(n) * y(n)} \xrightarrow{\mathcal{Z}T} \boxed{W(z) = X(z)Y(z)}, \qquad \boxed{\mathcal{R}_W \supseteq \mathcal{R}_x \cap \mathcal{R}_y}$$

7) **Γινόμενο σημάτων** Έχουμε τον πολλαπλασιασμό δύο ακολουθιών x και y:

$$x(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}T} X(z), \qquad \mathcal{R}_x$$
$$y(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}T} Y(z), \qquad \mathcal{R}_y$$

Για τον υπολογισμό του στο πεδίο Z, υπολογίζουμε, με βάση τον αντίστροφο μετασχηματισμό Z:

$$\begin{aligned} W(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\frac{1}{2\pi j}\oint_{C:\upsilon\in\mathcal{R}_Y} Y(\upsilon)\upsilon^{n-1}\,d\upsilon z^{-n} \\ &= \frac{1}{2\pi j}\oint_{C:\upsilon\in\mathcal{R}_Y} Y(\upsilon)\upsilon^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\upsilon^{n}z^{-n}\,d\upsilon \\ &\underset{\frac{z}{\upsilon}\in\mathcal{R}_x}{=} \frac{1}{2\pi j}\oint_{C:\upsilon\in\mathcal{R}_Y} Y(\upsilon)\upsilon^{-1}X\left(\frac{z}{\upsilon}\right)d\upsilon \\ W(z) &= \frac{1}{2\pi j}\oint_{C:\frac{z}{\upsilon}\in\mathcal{R}_x}^{\upsilon\in\mathcal{R}_Y} Y(\upsilon)\upsilon^{-1}X\left(\frac{z}{\upsilon}\right)d\upsilon \end{aligned}$$

Δεδομένων των περιορισμών, πρέπει:

$$\left.\begin{aligned} r_-^Y < |\upsilon| < r_+^Y \\ r_-^X < \left|\frac{z}{\upsilon}\right| < r_+^X \end{aligned}\right\} \mathcal{R}_W : r_-^X r_-^Y < |z| < r_+^Y r_+^X$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Z του:

$$x(n) = \delta(n)$$

Λύση

Έχουμε:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n)z^{-n} = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Z του:

$$x(n) = \delta(n - n_0)$$

Λύση

Έχουμε:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-n_0)z^{-n} = z^{-n_0}$$

Η περιοχή σύγκλισης εξαρτάται από το n_0 και είναι:

$$\begin{cases} n_0 > 0 & 0 < |z| \\ n_0 < 0 & |z| < \infty \end{cases}$$

Άσκηση

Να βρεθεί ο Μ/Σ Ζ:

$$x(n) = u(n)$$

Λύση

Έχουμε:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

Πρέπει $|z^{-1}| < 1$, άρα η περιοχή σύγκλισης είναι ROC: $|z| > 1$.

Άσκηση

Βρείτε Μ/Σ Ζ:

$$x(n) = u(n-n_0)$$

Λύση

Εκμεταλλευόμενοι την ιδιότητα του μετασχηματισμού Ζ, έχουμε:

$$\begin{aligned} X(z) &= z^{-n_0} \cdot \mathcal{Z}T\left\{u(n)\right\} = z^{-n_0}\frac{z}{z-1} \\ &= \frac{z^{-n_0+1}}{z-1} \end{aligned}$$

Για την περιοχή σύγκλισης, έχουμε $|z| > 1$ από το μετασχηματισμό της $u(t)$.

- Όταν ο εκθέτης είναι αρνητικός, δηλαδή $-n_0 + 1 < 0 \iff n_0 > 1$, έχουμε πόλους στο 0 και στο 1. Επειδή αποκλείεται (λόγω του $|z| > 1$) να βρισκόμαστε μέσα από τον μοναδιαίο κύκλο, αναγκαστικά το $\mathcal{R}_X$ θα είναι $|z| > 1$.
- Για $-n_0 + 1 > 0 \iff n_0 < 1$, έχουμε τον περιορισμό $1 < |z| < \infty$ όταν $n_0 < 0$.

Άσκηση

Αν:

$$X(z) = \frac{z}{3z^2 - 4z + 1}$$

να βρεθεί η $x(n)$ για κάθε πιθανή ROC.

Λύση

Πρώτα πρέπει να βρούμε τους **πόλους** της συνάρτησης, για να υπολογίσουμε τις πιθανές ROC. Έχουμε:

$$X(z) = \frac{z}{3\left(z^2 - \frac{4}{3}z + \frac{1}{3}\right)} = \frac{z}{3(z-1)\left(z-\frac{1}{3}\right)}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{z}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{z}{z-1/3}$$

Επομένως έχουμε πόλους στα σημεία $1, \frac{1}{3}$.

- **Αν ROC:** $|z| > 1$

  Τότε, δεδομένου του Μ/Σ Ζ της $u(n)$ ($U(z) = \frac{1}{1-1/z}, |z| > 1$) έχουμε:

  $$x(n) = \frac{1}{2}u(n) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

- **Αν ROC:** $|z| < \frac{1}{3}$:

  $$x(n) = -\frac{1}{2}u(-n-1) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n u(-n-1)$$

- **Αν ROC:** $\frac{1}{3} < |z| < 1$:

  $$x(n) = -\frac{1}{2}u(-n-1) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

Άσκηση

Να βρεθεί η $x(n)$ του μετασχηματισμού Z:

$$X(z) = \frac{z+1}{3z^2 - 4z + 1} \qquad |z| > 1$$

Λύση

Έχουμε:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z+1}{3z(z-1)\left(z-\frac{1}{3}\right)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} + \frac{\Gamma}{z-1/3}$$

όπου προκύπτει $A = 1, \quad B = 1, \quad \Gamma = -2$, άρα:

$$X(z) = 1 + \frac{z}{z-1} - 2\frac{z}{z-1/3} \implies \qquad |z| > 1$$
$$x(n) = \delta(n) + u(n) - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

Εναλλακτικά, χωρίς να διαιρέσουμε αυθαίρετα με το z:

$$X(z) = \frac{z+1}{3z^2-4z+1} = \frac{z}{3z^2-4z+1} + \frac{1}{3z^2-4z+1} \implies \qquad |z|>1$$
$$x(n) = \frac{1}{2}u(n) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) + \frac{1}{2}u(n-1) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u(n-1)$$

Εδώ, αν και φαινομενικά βγάλαμε διαφορετικά αποτελέσματα με τους δύο διαφορετικούς τρόπους προσέγγισης του προβλήματος, στην πραγματικότητα τα αποτελέσματα είναι *ίδια*. Πράγματι, θέτοντας $n = 0, n = 1, \ldots$ θα πρέπει να πάρουμε το ίδιο αποτέλεσμα.

Άσκηση

Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z του:

$$X(z) = \frac{z^4+z^2}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)} \qquad \frac{1}{2} < |z| < \infty$$

Λύση

Αυθαίρετα διαιρούμε με το z, και έχουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{X(z)}{z} &= \frac{z^3+z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)} = z + \frac{3}{4} + \frac{\frac{23}{16}z - \frac{3}{32}}{z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}} \\
&= z + \frac{3}{4} + \frac{5/2}{z-1/2} - \frac{17/6}{z-1/4} \\
&= z^2 + \frac{3}{4}z + \frac{5}{2}\frac{z}{z-1/2} - \frac{17}{16}\frac{z}{z-1/4} \implies \qquad \infty > |z| > \frac{1}{2} \\
x(n) &= \delta(n+2) + \frac{3}{4}\delta(n+1) + \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \frac{17}{16}\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)
\end{aligned}$$

Άσκηση

Να βρείτε το μετασχηματισμό Z της ακολουθίας:

$$x(n) = (n-2)a^{(n-2)}\cos\left(\omega_0(n-2)\right)u(n-2)$$

Λύση

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left\{x(n)\right\} &= z^{-2}\mathcal{Z}\left\{na^n\cos\left(\omega_0 n\right)u(n)\right\} \\
&= z^{-2}\left[-z\frac{d}{dz}\left[\mathcal{Z}\left\{a^n\cos(\omega_0 n)u(n)\right\}\right]\right] \\
&= z^{-2}\left[-z\frac{d}{dz}\,\mathcal{Z}\left\{\cos(\omega_0 n)u(n)\right\}\Big|_{z=\frac{z}{a}}\right]
\end{aligned}$$

Θέτουμε $\phi(n) = \cos(\omega_0 n)u(n)$, και θα βρούμε την $\Phi(z)$. Έχουμε:

$$u(n)\cos(\omega_0 n) = \frac{e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}}{2} u(n)$$

$$u(n)e^{j\omega_0 n} \xrightarrow{\mathcal{Z}T} \frac{1}{1 - \frac{e^{j\omega_0}}{z}} = \frac{z}{z - e^{j\omega_0}} \qquad \left|\frac{e^{j\omega_0}}{z}\right| < 1 \implies |z| > 1$$

$$u(n)e^{-j\omega_0 n} \xrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}} \qquad |z| > 1$$

$$u(n)\cos(\omega_0 n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{2}\left[\frac{z}{z - e^{j\omega_0}} + \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}}\right] = \frac{z^2 - z\cos\omega_0}{z^2 - 2z\cos\omega_0 + 1} \qquad |z| > 1$$

Άρα τελικά:

$$X(z) = -z\frac{d}{dz}\left(\left.\frac{z^2 - z\cos\omega_0}{z^2 - 2z\cos\omega_0 + 1}\right|_{z=\frac{z}{a}}\right) \qquad |z| > |a|$$

Διάλεξη 7η
22/10/2018

Χρήσιμοι τύποι

Στις παραπάνω ασκήσεις χρησιμοποιούσαμε συνεχώς τους τύπους:

$$X(z) = \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a| \xrightarrow{\mathcal{Z}T} x(n) = a^n u(n)$$

$$X(z) = \frac{z}{z-a}, \quad |z| < |a| \xrightarrow{\mathcal{Z}T} x(n) = -a^n u(-n-1)$$

Κλάσματα μεγαλύτερης πολλαπλότητας:

$$X(z) = \frac{z}{(z-a)^k}, \qquad |z| > |a| \qquad k \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$$

$$x(n) = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-2))}{(k-1)!} a^{n-k+1} u(n)$$

Απόδειξη Έχουμε:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{C\in ROC} X(z)z^{n-1}\,dz$$
$$= \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{z^n}{(z-a)^k}\,dz$$

Λαμβάνουμε περιπτώσεις για τη στιγμή n:

- Αν $n \geq 0$ τότε υπάρχει ένας πόλος στο $z_0 = a$ με πολλαπλότητα $s_0 = k$.

  Με βάση το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων, έχουμε:

$$x(n) = \frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[z^n\right]\bigg|_{z=a}$$
$$= \frac{1}{(k-1)!} n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-2))\, z^{n-(k-1)}\Big|_{z=a}$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-2))}{(k-1)!} a^{n-k+1}$$

- Αν $n < 0$, θέτω $\rho = \frac{1}{z}$, άρα η περιοχή σύγκλισης γίνεται $|\rho| < \frac{1}{|\alpha|}$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi j}\oint_{C\in ROC} \frac{\rho^{-n}}{(\rho^{-1}-a)^k}\frac{1}{\rho^2}\, d\rho \\ &= \frac{1}{2\pi j}\oint_{C} \frac{\rho^{-n}\rho^{k-2}}{(1-a\rho)^k}\, d\rho = \frac{1}{2\pi j}\oint_{C} \frac{\rho^{-n+k-2}}{\left(-a\right)^k\left(\rho-\frac{1}{a}\right)^k}\, d\rho \end{aligned}$$

Αφού $n-k+2 < 0$, ο πόλος βρίσκεται εκτός της καμπύλης C, επομένως το παραπάνω ολοκλήρωμα γίνεται:

$$x(n) = 0$$

Θεώρημα 3.1: Γενικός τύπος κλάσματος σε Μ/Σ $\mathcal{Z}$

Τα παραπάνω συνοψίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{z}{(z-a)^k}, \qquad |z| < |a| \qquad k \in \mathbb{N} - \{0,1\} \\ x(n) &= (-1)^k a^{-k} a^{n+1}\frac{(k-n-2)(k-n-3)\cdots(-n)}{(k-1)!}u(-n-1) \end{aligned}$$

Άσκηση

Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της ακολουθίας:

$$X(z) = \frac{z^2+z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^3\left(z-\frac{1}{4}\right)}$$

για όλες τις πιθανές περιοχές σύγκλισης.

Λύση

Η κάθε πιθανή περιοχή σύγκλισης δεν πρέπει να περιέχει άλλο πόλο, άρα οι πιθανές περιοχές σύγκλισης είναι $|z| > \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{2}$, $|z| < \frac{1}{4}$.

- **Για** $|z| > \dfrac{1}{2}$, μετατρέπουμε σε μερικά κλάσματα:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z+1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^3\left(z-\frac{1}{4}\right)} = \frac{A}{z-\frac{1}{2}} + \frac{B}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{\Gamma}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^3} + \frac{\Delta}{z-\frac{1}{4}}$$

Υπολογίζουμε τις σταθερές:

$$X(z) = \frac{80z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{-20z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{6z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^3} + \frac{-80z}{z-\frac{1}{4}}$$

Τώρα, αρκεί να υπολογίσουμε ξεχωριστά τον κάθε όρο, με βάση τα παραπάνω:

  - $\dfrac{80z}{z-\frac{1}{2}} \xrightarrow{\mathcal{Z}} T\; 80\left(\dfrac{1}{2}\right)^n u(n)$
  - $\dfrac{-80z}{z-\frac{1}{4}} \xrightarrow{\mathcal{Z}} T\; -80\left(\dfrac{1}{4}\right)^n u(n)$

- $$\frac{-20z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{6z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^3} \xrightarrow{\mathcal{Z}} T \; -20n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n)+6\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}u(n)$$

Άρα τελικά:

$$x(n)=\left[80\left(\frac{1}{2}\right)^n-20n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+3n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}-80\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u(n)$$

Άσκηση για το σπίτι

Να υπολογιστεί η $x(n)$ και για τις άλλες δύο πιθανές περιοχές σύγκλισης.
Προσοχή στο ότι δεν είναι απαραίτητο να υπολογιστούν ξανά οι σταθερές και όλα τα κλάσματα, παρά μόνον αυτά που αλλάζουν λόγω της διαφορετικής περιοχής σύγκλισης.

Άσκηση: Θέμα 4 Σεπτεμβρίου 2018

Δίνεται η κρουστική απόκριση ενός συστήματος:

$$h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)+\left(-\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

Εξετάστε αν το σύστημα είναι:

- Αιτιατό;
- Ευσταθές;
- Πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης;

Επιπλέον, να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier και ο μετασχηματισμός Z της $h(n)$. Να βρεθεί μια εξίσωση διαφορών που να συνδέει τα $y(n)$ με τις τιμές των $x(n)$. Να βρεθεί η ενέργεια του $h(n)$.

Λύση

1. Το σύστημα είναι **αιτιατό**, γιατί $h(n)=0$ για $n<0$.
2. Για να είναι το σύστημα ευσταθές κατά ΦΕΦΕ, η κρουστική απόκριση πρέπει να είναι απολύτως αθροίσιμη, δηλαδή να ελέγξουμε αν συγκλίνει το $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|$.

   Έχουμε:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)| &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(-\frac{1}{30}\right)^n\right| \\ &\le \sum_{n=0}^{\infty}\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n\right|+\sum_{n=0}^{\infty}\left|\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{1-\frac{1}{3}} \\ &= 2+\frac{3}{2}<\infty \implies \sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty\end{aligned}$$

   Άρα το σύστημα είναι **ευσταθές** κατά ΦΕΦΕ.

3. Η κρουστική απόκριση δεν είναι πεπερασμένη στο χρόνο, αφού δεν υπάρχει κάποια στιγμή μετά από την οποία να μηδενίζονται οι όροι της.

   Μαθηματικά, το σύστημα **δεν είναι πεπερασμένης** διάρκειας, γιατί $\nexists\ k \in \mathbb{N}\ :\ h(n) = 0\ \forall n > k$.

4. Για το **μετασχηματισμό Z**, έχουμε:

$$\begin{aligned}
H(z) &\triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n} z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2z}\right)^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3z}\right)^{n} \\
&= \underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{2z}}}_{\text{αν } \left|\frac{1}{2z}\right| < 1} + \underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{3z}}}_{\text{αν } \left|\frac{-1}{3z}\right| < 1} \\
&= \frac{z}{z - 1/2} + \frac{z}{z + 1/3} \qquad |z| > \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

   Άρα τελικά:

$$H(n) = \frac{z}{z - 1/2} + \frac{z}{z + 1/3} \qquad \text{ROC: } |z| > \frac{1}{2}$$

5. Για τον υπολογισμό του **μετασχηματισμού Fourier**, έχουμε τον ορισμό:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n}$$

   Θέτοντας $z = e^{j\omega}$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την πληροφορία από το μετασχηματισμό Z, καθώς $\left|e^{j\omega}\right| = 1 > \frac{1}{2}$, δηλαδή ανήκουμε στην περιοχή σύγκλισής του.

   Άρα τελικά:

$$\begin{aligned}
H\left(e^{j\omega}\right) &= H(z)\big|_{z=e^{j\omega}} \\
&= \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - 1/2} + \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} + 1/3}
\end{aligned}$$

6. Το παραπάνω σύστημα εκφράζεται από τη σχέση:

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

   ή, στο πεδίο της συχνότητας:

$$X(z)H(z) = Y(z)$$

   Θα προσπαθήσουμε, επεκτείνοντας την παραπάνω σχέση, να βρούμε μια σχέση μεταξύ $x(n)$ και

$y(n)$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
X(z)\left[\frac{z}{z-1/2}+\frac{z}{z+1/3}\right] &= Y(z)\\
X(z)\left[\frac{z^2+\frac{1}{3}z+z^2-\frac{1}{2}z}{z^2-\frac{1}{6}z-\frac{1}{6}}\right] &= Y(z)\\
X(z)\left[\frac{2z^2-\frac{1}{6}z}{z^2-\frac{1}{2}z-\frac{1}{6}}\right] &= Y(z)\\
X(z)\left[\frac{2-\frac{1}{6}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{6}z^{-2}}\right] &= Y(z)\\
X(z)\left(2-\frac{1}{6}z^{-1}\right) &= Y(z)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{6}z^{-2}\right)
\end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε inverse $\mathcal{Z}$ transform:

$$2x(n)-\frac{1}{6}x(n-1)=y(n)-\frac{1}{2}y(n-1)-\frac{1}{6}y(n-2)$$

$$\boxed{y(n)=\frac{1}{2}y(n-1)+\frac{1}{6}y(n-2)+2x(n)-\frac{1}{6}x(n-1)} \qquad n\geq 0$$

Λάβαμε μία σχέση η οποία συνδέει το **τρέχον** y μόνο με τα **προηγούμενα** y, x και το **τρέχον** x. Αυτό επιβεβαιώνει πως το σύστημά μας είναι αιτιατό. Η σχέση αυτή είναι μια **εξίσωση διαφορών**.

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να μην είχαμε διαιρέσει τους όρους του κλάσματος με z^2, και θα προέκυπτε μία σχέση όπου θα μπορούσαμε να κάνουμε αντικατάσταση της μεταβλητής n ώστε να λάβουμε το ίδιο αποτέλεσμα, που να μην εξαρτά τρέχουσες από μελλοντικές στιγμές.

7. Η **ενέργεια** του σήματος είναι:

$$\begin{aligned}
E &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|^2=\sum_{n=0}^{\infty}\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right|^2\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{2n}+2\left(\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)^n\\
&=\sum\left(\frac{1}{4}\right)^n+\sum\left(\frac{1}{9}\right)^n+\sum 2\left(-\frac{1}{6}\right)^n\\
&=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}+\frac{1}{1-\frac{1}{9}}+2\frac{1}{1+\frac{1}{6}}\\
&=\frac{4}{3}+\frac{9}{8}+\frac{12}{7}=\frac{701}{168}
\end{aligned}$$

Διάλεξη 8η
29/10/2018

Άσκηση

Δίνεται η συνάρτηση:

$$X(z)=\frac{z}{z-a}$$

Να βρεθούν οι πιθανές περιοχές σύγκλισης του μετασχηματισμού Z που εκφράζει η $X(z)$.

Λύση

Ο μετασχηματισμός μπορεί να συγκλίνει είτε για $|z| > |a|$ ή $|z| < |a|$. Αν θέσω $z = a$, τότε ο μετασχηματισμός δεν θα ορίζεται λόγω του παρονομαστή, δηλαδή δεν θα συγκλίνει. Όμως αν θέσω διαφορετικές τιμές $z = a + 0.1$ ή $z = a - 0.1$, τότε η $X(z)$ θα δίνει ένα φυσιολογικό νούμερο. Από αυτό, προκύπτει το ερώτημα γιατί πρέπει να κρατάμε μόνο μία περιοχή $|z| > |a|$ ή $|z| < |a|$ και όχι ολόκληρη τη $|z| \neq |a|$.

Αυτό απαντάται λόγω του ότι η $X(z)$ πρέπει να είναι **συνεχής**, γιατί μόνο τότε μπορεί να εκφραστεί σαν το άπειρο άθροισμα των όρων που προκύπτει από τον ορισμό του μετασχηματισμού Z:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty} \infty x(n) z^{-n}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα μοιάζει με τη σειρά $\frac{1}{1+x}$, που έχει διαφορετικά αναπτύγματα για $|x| < 1$ και $|x| > 1$.

3.5 Εξίσωση διαφορών για γραμμικό & ΑΚΜ σύστημα

Το αντίστοιχο των διαφορικών εξισώσεων στο αναλογικό σήμα είναι οι **εξισώσεις διαφορών** στα ψηφιακά συστήματα, οι οποίες σχετίζουν τιμές των συναρτήσεών μας με τιμές άλλων συναρτήσεων άλλες στιγμές.

Ορισμός 3.2: Εξίσωση διαφορών

Ως **γραμμική εξίσωση διαφορών** ορίζεται η:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r) \quad a_0 \neq 0$$

ή, ισοδύναμα:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{a_0} y(n-k) + \sum_{r=0}^{M} \frac{b_r}{a_0} x(n-r)$$

Η **γραμμικότητα** στις παραπάνω σχέσεις εκφράζεται από την έλλειψη γινομένων y και x, και την έλλειψη άλλων *περίεργων* όρων.

Παράδειγμα

$$y(n) - ay(n-1) = x(n)$$

Για να έχει νόημα η εξίσωση διαφορών, πρέπει να ορίσουμε και την **περιοχή** στην οποία ορίζεται. Σε αυτό το παράδειγμα, θα μπορούσε να μας δοθεί:

$$n \geq 0 \qquad y(n) = 0 \; \forall n < 0$$

Έστω ότι η είσοδος είναι κρουστική:

$$x(n) = \delta(n)$$

άρα η έξοδος θα είναι η κρουστική απόκριση του συστήματος:

$$h(n) = ah(n-1) + \delta(n)$$

Τώρα, μπορούμε να κάνουμε μια *αφελή* λύση της εξίσωσης, υπολογίζοντας n after n:

$$\begin{aligned}
n = 0 \quad & h(0) = \cancelto{0}{ah(-1)} + 1 = 1 \\
n = 1 \quad & h(1) = ah(0) + \delta(1) = a \\
n = 2 \quad & h(2) = ah(1) + \delta(2) = a^2 \\
\vdots \quad & \vdots
\end{aligned}$$

Με επαγωγή μπορούμε να αποδείξουμε ότι:

$$h(n) = a^n u(n)$$

οπότε βρήκαμε τη λύση της εξίσωσης.

Από την μεριά, αν μας δινόταν ότι $y(n) = 0\ \forall n \geq 0$, τότε θα βρίσκαμε ότι

$$h(0) = 0 \tag{2}$$

$$h(1) = 0 \tag{3}$$

$$\vdots \tag{4}$$

αλλά θα μπορούσαμε, υπολογίζοντας μελλοντικούς χρόνους, να βρούμε τι γίνεται για αρνητικά n:

$$\begin{aligned}
y(n-1) &= \frac{1}{a}y(n) - \frac{x(n)}{a} \\
y(-1) &= \frac{1}{a}\cancelto{0}{y(0)} - \cancelto{1}{\frac{x(0)}{a}} = -\frac{1}{a} \\
y(-2) &= \frac{1}{a}y(-1) - \cancelto{0}{\frac{x(-1)}{a}} = \frac{1}{a}\left(-\frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{a^2} \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
y(n) &= -a^n u(-n-1)
\end{aligned}$$

Το παραπάνω συμπέρασμα θυμίζει και τα διαφορετικά αποτελέσματα που προκύπτουν όταν έχουμε διαφορετικές περιοχές σύγκλισης στο μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$.

3.5.1 Εξαγωγή συνάρτησης μεταφοράς

Έστω ότι γνωρίζουμε για μια συνάρτηση $H(z)$ τις **θέσεις των πόλων** q, τις θέσεις των μηδενικών p, και τις πολλαπλότητές τους. Δηλαδή ξέρουμε ότι η συνάρτηση είναι της μορφής:

$$H(z) = A\frac{(z-q_1)^{s_1^q}(z-q_2)^{s_2^q}\cdots(z-q_n)^{s_n^q}}{(z-p_1)^{s_1^p}(z-p_2)^{s_2^p}\cdots(z-p_m)^{s_m^p}}$$

Τότε, πραγματοποιώντας τις πράξεις στον παρονομαστή και τον αριθμητή, θα λάβουμε πολυώνυμα μέσα από τα οποία θα προκύπτει ουσιαστικά η εξίσωση διαφορών που παράγει την $h(n)$.

Παράδειγμα

$$\boxed{H(z) = \frac{z-3}{z-\frac{1}{3}}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \implies \qquad z|z| > \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}
(1-3z^{-1})X(z) &= \left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)Y(z) \\
X(z) - 3z^{-1}X(z) &= Y(z) - \frac{1}{3}z^{-1}Y(z) \xRightarrow{I\mathcal{Z}T} \\
x(n) - 3x(n-1) &= y(n) - \frac{1}{3}y(n-1) \\
y(n) &= \frac{1}{3}y(n-1) + x(n) - 3x(n-1) \qquad n \geq 0
\end{aligned}$$

Άσκηση

Δίνεται μία $H(z)$ με πόλο $z = a$ και μηδενικό $z = \frac{1}{a^*}$. Ισχύει $|a| < 1$, και το σύστημα είναι αιτιατό.

Να βρεθεί η απόκριση συχνότητας του συστήματος.

Λύση

Θεωρούμε ότι $a \in \mathbb{R}$. Για να έχουμε το δικαίωμα να βρούμε απόκριση συχνότητας (δηλαδή να βάλουμε το $z = e^{j\omega}$), πρέπει να επιβεβαιώσουμε ότι ο μοναδιαίος κύκλος ανήκει στην περιοχή σύγκλισης.

Το σύστημα έχει τη μορφή:

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{a}}{z - a}$$

(χωρίς να μας ενδιαφέρει η σταθερά A) που μπαίνει από μπροστά.

Για να βρούμε την απόκριση συχνότητας, θεωρούμε $z = e^{j\omega}$:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{e^{j\omega} - \frac{1}{a}}{e^{j\omega} - a} \\ \left|H(\omega)\right|^2 &= \frac{\left(e^{j\omega} - \frac{1}{a}\right)\left(e^{-j\omega} - \frac{1}{a}\right)}{\left(e^{j\omega} - a\right)\left(e^{-j\omega} - a\right)} = \frac{1 + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a}\left(e^{j\omega} + e^{-j\omega}\right)}{1 + a^2 - a\left(e^{j\omega} + e^{-j\omega}\right)} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a} 2\cos\omega}{1 + a^2 - a^2\cos\omega} = \frac{1}{a^2}. \end{aligned}$$

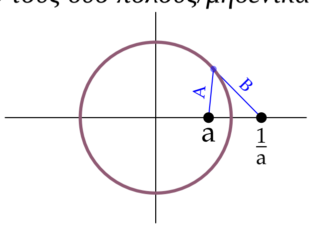
Όλες οι συχνότητες έχουν σταθερό κέρδος, άρα το σύστημα είναι **all-pass**.

Εναλλακτικά, μπορούσαμε να έχουμε:

$$H(z) = \frac{z - \frac{1}{a}}{z - a}$$

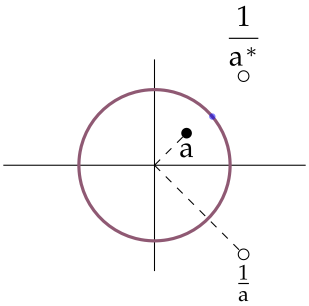
$$\begin{aligned} \left|H(\omega)\right| &= \left|H(z)\right|_{z=e^{j\omega}} \\ &= \frac{\left|\left(z - {}^{1}\!/_{a}\right)\right|_{z=e^{j\omega}}}{\left|(z - a)\right|_{z=e^{j\omega}}} = \frac{B}{A} \end{aligned}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα εκφράζει ότι ο *λόγος των αποστάσεων ενός σημείου του μοναδιαίου κύκλου από τους δύο πόλους/μηδενικά είναι σταθερός.*



Για το παραπάνω υπάρχει και γεωμετρική απόδειξη που βασίζεται στο γενικευμένο πυθαγόρειο θεώρημα.

Αν είχαμε θεωρήσει ότι $a \in \mathbb{C}$, το μιγαδικό επίπεδο του z θα έμοιαζε ως εξής:



Δεδομένου ότι η εκφώνηση μας δίνει τα σημεία a και $\frac{1}{a^*}$, το αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο με πριν, αφού μπορούμε απλώς να περιστρέψουμε το επίπεδο και να φτάσουμε τις ίδιες συνθήκες με πριν.

Αντίστοιχα, προσθέτοντας περισσότερα τέτοια ζευγάρια πόλων-μηδενικών μπορούμε να έχουμε πάλι all-pass συστήματα:

Άσκηση

Να χαρακτηριστούν τα δύο συστήματα:

$$S_1: \qquad y_1(n) = \frac{x(n) + x(n-1)}{2}$$

$$S_2: \qquad y_2(n) = \frac{x(n) - x(n-1)}{2}$$

Λύση

Το σύστημα είναι **ευσταθές** όταν ο μοναδιαίος κύκλος ανήκει στην **περιοχή σύγκλισης**. Η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι $h(n) = \frac{1}{2}\delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1)$ (αφού $y = x * h$). Έχει δύο όρους, πολύ λιγότερους από ∞, άρα η ακολουθία είναι απολύτως αθροίσιμη. Επομένως το σύστημα είναι ευσταθές.

Εναλλακτικά, το σύστημα είναι ευσταθές αφού η έξοδος προκύπτει από άθροιση πεπερασμένου πλήθους δειγμάτων της εισόδου χωρίς ανάδραση (προηγούμενες τιμές y).

Αφού και τα δύο συστήματος είναι ευσταθή, ο μοναδιαίος κύκλος ανήκει στην περιοχή σύγκλισης, και μπορούμε άφοβα να θέσουμε $z = e^{j\omega}$.

Το παραπάνω συμπέρασμα μοιάζει με αυτό που είχαμε εξάγει στο αναλογικό σήμα. Ότι δηλαδή το σύστημα είναι ευσταθές όταν *όλοι οι πόλοι βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο*, ή αντίστοιχα όταν ο φανταστικός άξονας ανήκει στην περιοχή σύγκλισης.

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
S_1: \qquad Y_1(z) &= \frac{1}{2}\left(X(z) + z^{-1}X(z)\right) \\
H_1(z) &= \frac{Y_1(z)}{X(z)} = \frac{1}{2}\left(1 + z^{-1}\right) \\
H_1(\omega) &= H_1(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-j\omega}\right) \\
\left|H_1(\omega)\right| &= \left|e^{-j\frac{\omega}{2}}\frac{1}{2}\left(e^{j\frac{\omega}{2}} + e^{-j\frac{\omega}{2}}\right)\right| \\
&= 1 \cdot \frac{1}{2}\left|2\cos\frac{\omega}{2}\right| = \left|\cos\frac{\omega}{2}\right|
\end{aligned}$$

Για να εξάγουμε συμπέρασμα για το χαρακτήρα του συστήματος, κοιτάμε μόνο το κομμάτι από 0 ως π. Επομένως το παραπάνω σύστημα είναι **low-pass**. Το δεξί κομμάτι είναι το αντίστοιχο *αρνητικό κομμάτι* του αναλογικού μετασχηματισμού Fourier.

Για το δεύτερο σύστημα:

$$
\begin{aligned}
S_2 \qquad Y_2(z) &= \frac{X(z) - z^{-1}(z)}{2} \\
H_2(z) &= \frac{Y_2(z)}{X(z)} = \frac{1}{2}(1 - z^{-1}) \\
H_2(\omega) &= \frac{1}{2}\left(1 - e^{-j\omega}\right) = e^{-j\frac{\omega}{2}}\frac{1}{2}\left(e^{\frac{j\omega}{2}} - e^{-\frac{j\omega}{2}}\right) \\
\left|H_2(\omega)\right| &= \left|\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|
\end{aligned}
$$

Εδώ, κοιτώντας από 0 ως π, διαπιστώνουμε ότι το σύστημα είναι **high pass**.

Στα παραπάνω συμπεράσματα μπορούσαμε να φτάσουμε και πριν λύσουμε τα μαθηματικά. Πράγματι, τα συστήματα μπορούν να γραφτούν και ως εξής:

$$
\begin{aligned}
y_1(n) &= \frac{1}{2}\left(x(n) + x(n-1)\right) \\
y_2(n) &= \frac{1}{2}\left(x(n) - x(n-1)\right)
\end{aligned}
$$

Το πρώτο σύστημα είναι ουσιαστικά ένα **τοπικό ολοκλήρωμα**, και το δεύτερο μια **τοπική παράγωγος** στον ψηφιακό κόσμο. Οπότε, μπορούμε να θυμηθούμε τις αντιστοιχίες από το αναλογικό σήμα και να εξάγουμε τα ίδια συμπεράσματα.

Άσκηση

Να χαρακτηριστεί *πρόχειρα* το σύστημα:

$$
y(n) = \frac{x(n) - 2x(n-1) + x(n-2)}{6}
$$

Λύση

Ισχύει:

$$
y(n) = \frac{x(n) - x(n-1)}{6} - \frac{x(n-1) - x(n-2)}{6}
$$

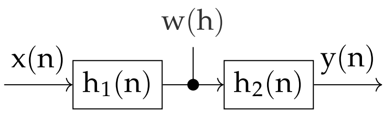
Εδώ έχουμε ουσιαστικά **διαφορά πρώτης παραγώγου μείον δεύτερης παραγώγου**. Αφού η κάθε παράγωγος είναι high pass, και το ίδιο το σύστημα είναι high pass.

Διάλεξη 9η
2/11/2018

3.5.2 Σύνδεση συστημάτων

Είναι απλό να δούμε τι συμβαίνει με συστήματα που συνδέονται σε συγκεκριμένες συνδεσμολογίες, τις οποίες θέλουμε να μετατρέψουμε σε ένα σύστημα $h(n)$.

Εν σειρά (καταρράκτης)



Έχουμε:

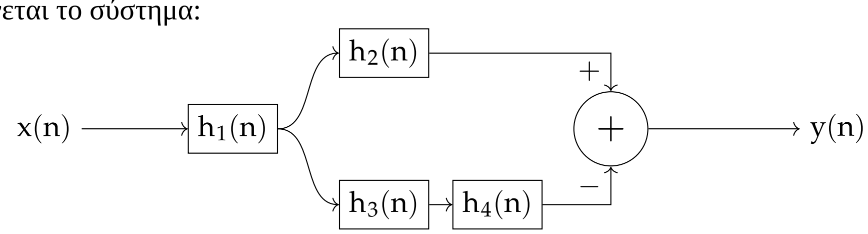
$$\begin{aligned}
w(n) &= x(n) * h_1(n) \\
y(n) &= w(n) * h_2(n) = \big(x(n) * h_1(n)\big) * h_2(n) \\
&= x(n) * \big(h_1(n) * h_2(n)\big) \\
Y(z) &= X(z) \cdot H(z)
\end{aligned}$$

Παράλληλη σύνδεση

$$\begin{aligned}
y(n) &= x(n) * h_1(n) \pm x(n) * h_2(n) \\
&= x(n) * \big(h_1(n) \pm h_2(n)\big) \\
Y(z) &= H(z)X(z) \qquad \text{όπου } H(z) = H_1(z) \pm H_2(z)
\end{aligned}$$

Άσκηση

Δίνεται το σύστημα:



με τις κρουστικές αποκρίσεις του κάθε μπλοκ:

$$\begin{aligned}
h_1(n) &= \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\} \\
h_2(n) &= h_3(n) = (n+1)u(n) \\
h_4(n) &= \delta(n-2)
\end{aligned}$$

Να βρεθεί η ισοδύναμη $h(n)$ του συστήματος.

Λύση

Πρώτα, μετατρέπουμε την $h_1(n)$ σε μια πιο "μαθηματική" μορφή:

$$h_1(n) = \frac{1}{2}\delta(n) + \frac{1}{4}\delta(n-1) + \frac{1}{2}\delta(n-2)$$

Άρα, με βάση τα παραπάνω, η κρουστική απόκριση του συστήματος θα είναι:

$$\begin{aligned}
h(n) &= h_1(n) * \boxed{A} \\
&= h_1(n) * \Big[h_2(n) - \boxed{B}\Big] \\
&= h_1(n) * \big[h_2(n) - h_3(n) * h_4(n)\big] \\
&= h_1(n) * \big[nu(n) + u(n) - nu(n-2) + u(n-2)\big]
\end{aligned}$$

Εδώ, επειδή έχουμε διακριτά n, μπορούμε να μετατρέψουμε τη διαφορά $nu(n) - nu(n-2)$ σε συναρτήσεις δ

$$\begin{aligned}
&= h_1(n) * \big[2u(n) - \delta(n)\big] = \left[\frac{1}{2}\delta(n) + \frac{1}{4}\delta(n-1) + \frac{1}{2}\delta(n-2)\right] * \big[2u(n) - \delta(n)\big] \\
&= \frac{5}{2}u(n-3) + \frac{1}{2}\delta(n) + \frac{5}{4}\delta(n-1) + 2\delta(n-2)
\end{aligned}$$

Άσκηση

Για το σύστημα:
ζητούνται:

1) Η εξίσωση διαφορών

2) Η $H(z)$ του μαζί με τη ROC (περιοχή σύγκλισης)

3) Να μελετηθεί η ευστάθεια του συστήματος.

Λύση

1) Πρώτα, ασχολούμαστε με τη βοηθητική συνάρτηση $v(n)$:

$$\begin{aligned} v(n) &= x(n) * u(n) - x(n) * u(n-2) = x(n) * \big(u(n) - u(n-2)\big) \\ &= x(n) * \big[\delta(n) + \delta(n-1)\big] = x(n) + x(n-1) \end{aligned}$$

Προχωράμε και στο δεύτερο μέρος:

$$\begin{aligned} y(n) &= w(n) * \delta(n-1) \\ &= \Big[v(n) + 11\delta(n-1) * y(n) + \big(2\delta(n) - 3\delta(n-1)\big) * y(n)\Big] * \delta(n-1) \\ &= x(n-1) + (n-2) + \big[11y(n-1) + 2y(n) - 3y(n-1)\big] * \delta(n-1) \\ &= x(n-1) + x(n-2) + 8y(n-2) + 2y(n-1), \qquad \text{για } n \geq 0 \end{aligned}$$

2) Με βάση την παραπάνω έκφραση της $H(z)$, έχουμε:

$$\begin{aligned} &Y(z) = z^{-1}X(z) + z^{-2}X(z) + 8z^{-2}Y(z) + 2z^{-1}Y(z) \implies \\ &H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2z^{-1} - 8z^{-2}} = \frac{z+1}{z^2 - 2z - 8} \end{aligned}$$

Οι πόλοι είναι $z_1 = 4$ και $z_2 = -2$, με πιθανές περιοχές σύγκλισης:

- $|z| < 2$
- $2 < |z| < 4$
- $4 < |z|$

Αφού το σύστημα είναι **αιτιατό**, το ROC τελικά είναι $|z| > 4$.

3) Αφού $\left|e^{j\omega}\right| \notin$ ROC, το σύστηα είναι ασταθές.

Παράδειγμα "μονόπλευρου" μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = x(n) - \frac{1}{4}x(n-1) \qquad n \geq 0$$
$$y(n)z^{-n} - \frac{1}{2}y(n-1)z^{-n} = x(n)z^{-n} - \frac{1}{4}x(n-1)z^{-n}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} y(n)z^{-n} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} y(n-1)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} x(n-1)z^{-n}$$
$$Y(z) - \frac{1}{2}\sum_{k=-1}^{\infty} y(k)z^{-k-1} = X(z) - \frac{1}{4}\sum_{k=-1}^{\infty} x(k)z^{-k-1}$$
$$Y(z) - \frac{1}{2}z^{-1}\sum_{k=-1}^{\infty} y(k)z^{-k} = X(z) - \frac{1}{4}z^{-1}\sum_{k=-1}^{\infty} x(k)z^{-k}$$
$$Y(z) - \frac{1}{2}z^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k} + y(-1)z\right) = X(z) - \frac{1}{4}z^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} + x(-1)z\right)$$
$$Y(z) - \frac{1}{2}z^{-1}\left(Y(z) + y(-1)z\right) = X(z) - \frac{1}{4}z^{-1}\left[X(z) + x(-1)z\right]$$
$$Y(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) - \frac{1}{2}y(-1) = X(z) - \frac{1}{4}z^{-1}X(z) - \frac{1}{4}x(-1)$$
$$Y(z) = X(z)\underbrace{\frac{1-\frac{1}{4}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}}_{\text{εξαναγκασμένη απόκριση}} + \underbrace{\frac{1/2\,y(-1) - 1/4\,x(-1)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}}_{\text{ελεύθερη απόκριση}}$$

Άσκηση για το σπίτι

Ποιά είναι η $y(n) =?$ όταν $x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$ για $y(-1) = 1$ με το σύστημα που περιγράφεται από την παραπάνω εξίσωση διαφορών;

Η απάντηση θα είναι:

$$y(n) = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{1}{2}\right] u(n) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

Άσκηση

Δίνεται το σύστημα $y(n) = (x(n)a^{-n}) * (h(n)a^n)$
όπου:

$$H(z) = \frac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

μία αιτιατή συνάρτηση.
Να βρεθεί το ισοδύναμό του σύστημα $g(n)$.

Λύση

Από το διάγραμμα, παρατηρούμε ότι:

$$\left.\begin{aligned} r(n) &= x(n)a^{-n} \\ w(n) &= r(n) * h(n) \\ y(n) &= w(n)a^n \end{aligned}\right\} \implies y(n) = a^n\left(r(n) * h(n)\right)$$

Άρα μπορούμε να εκτελέσουμε τις πράξεις:

$$y(n) = a^n \left[\left(a^{-n} x(n) \right) * h(n) \right] = a^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) a^{-(n-k)} x(n-k)$$
$$= a^n a^{-n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) a^k x(n-k) = x(n) * \left[h(n) a^n \right] = x(n) * g(n)$$

Άρα $\quad g(n) = a^n h(n) \implies$

$$G(z) = H\left(\frac{z}{a}\right) = \frac{1 - \left(\frac{z}{a}\right)^{-1}}{1 - \frac{1}{z}\left(\frac{z}{a}\right)^{-1}}$$

Για την περιοχή σύγκλισης, παρατηρούμε πως η H έχει πόλο στο $\frac{1}{2}$. Άρα:

$$\mathrm{ROC_H} : \ |z| > \frac{1}{2} \implies \mathrm{ROC_G} : \ \left|\frac{z}{a}\right| > \frac{1}{2}$$

άρα $|z| > \dfrac{|a|}{2}$.

Λαμβάνοντας υπ' όψιν το κριτήριο για τον μοναδιαίο κύκλο $e^{j\omega}$: Αν $\frac{|a|}{2} < 1$, τότε G ευσταθές, διαφορετικά το G είναι ασταθές.

Άσκηση

Να βρεθεί η $x(n)$, αν:

$$x(n) = \mathrm{I}\mathcal{Z}\mathrm{T}\left\{ \log\left(1 + az^{-1}\right) \right\} \qquad |z| > |a|$$

Λύση

Μία ιδέα για να βρούμε τη $x(n)$ θα ήταν να αξιοποιήσουμε τη **σειρά Taylor** του λογαρίθμου:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \qquad -1 < x < 1$$
$$X(z) = az^{-1} - \frac{a^2}{2} z^{-2} + \frac{a^3}{3} z^{-3} - \frac{a^4}{4} z^{-4} + \dots$$
$$x(n) = \left\{ 0, a, -\frac{a^2}{2}, \frac{a^3}{3}, -\frac{a^4}{4}, \dots \right\} = (-1)^{n-1} \frac{a^n}{n}$$

Δηλαδή, βρίσκοντας τη σειρά Laurent της συνάρτησης, μπορούμε να βρούμε και τους όρους της ακολουθίας, με βάση και τον ορισμό $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$.

Εναλλακτικά, χωρίς τη σειρά Taylor, εκμεταλλευόμαστε τις σχέσεις:

$$nx(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}\mathrm{T}} -z\frac{dx(z)}{dz} = -z\frac{1}{1 + az^{-1}}(-az^{-2}) = \frac{az^{-1}}{1 + az^{-1}}$$
$$= az^{-1} \frac{z}{z+a}$$
$$\frac{z}{z+a} \xrightarrow{\mathrm{I}\mathcal{Z}\mathrm{T}} a^n u(n) \qquad |z| > |a|$$
$$z^{-1} \frac{z}{z+a} \xrightarrow{\mathrm{I}\mathcal{Z}\mathrm{T}} (-a)^{n-1} u(n-1)$$

Άρα

$$nx(n) = (-1)^{n-1}a^n u(n-1)$$

Διάλεξη 10^{η}
5/11/2018

Κεφάλαιο 4 Δειγματοληψία

Στο παρόν θα εξετάσουμε το μετασχηματισμό **Fourier** που δίνει ένα **διακριτό δειγματοληπτημένο** σήμα, και θα τον συγκρίνουμε με το μετασχηματισμό Fourier του αρχικού **αναλογικού** σήματος. Πρακτικά, μέσα από το μετασχηματισμό Fourier που δίνει ένας υπολογιστής θέλουμε να δούμε τις πληροφορίες που μπορούμε να εξάγουμε για το διακριτό σήμα.

Συνεχής μετασχηματισμός Fourier διακριτού σήματος Υπενθυμίζουμε πως ο συνεχής MF μιας ακολουθίας ορίζεται ως εξής:

$$x(n) \to X\left(e^{j\omega}\right) = X(\omega) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

όπου η ω είναι **συνεχής**, με εύρος π.χ. $(-\pi, \pi)$ ή $(0, 2\pi)$.

Ο αντίστροφος ορίζεται ως $x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}\,d\omega$.

Αυτός είναι ο **συνεχής μετασχηματισμός Fourier** ενός **διακριτού σήματος**.

Σε περιοδικά σήματα Έστω ότι έχουμε ένα **περιοδικό** σήμα $\tilde{x}(n)$ με περίοδο N δείγματα.

Το περιοδικό σήμα αυτό περιέχει στην πραγματικότητα μόνο N **αριθμούς πληροφορίας**. Αφού τα N δείγματα επαναλαμβάνονται συνεχώς, είναι το μόνο δεδομένο που περιγράφει το σήμα. Επομένως, και ο μετασχηματισμός Fourier του δεν μπορεί να περιέχει παραπάνω ή λιγότερη πληροφορία, άρα θα πρέπει και αυτός να περιέχει N αριθμούς.

Τότε αποδεικνύεται ότι:

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk} \qquad \forall n$$

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}$$

Οι παραπάνω σχέσεις προκύπτουν από τον ορισμό του συνεχή μετασχηματισμού Fourier, στον οποίο όμως το n κινείται μόνο από 0 μέχρι $N-1$ και αυτό επαναλαμβάνεται, όπου θέσαμε $\omega = \frac{2\pi}{N}k$. Το $X(k)$ είναι η **διακριτή σειρά Fourier**.

Ακόμα, αν έχουμε δύο περιοδικά σήματα $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ με ίδια περίοδο N, τότε για το σήμα $\tilde{x}_3(n) = \tilde{x}_1(n)\tilde{x}_2(n)$ ισχύει:

$$\tilde{X}_3(k) = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\tilde{X}_1(l)\tilde{X}_2(k-l) = X_1(k) * X_2(k)$$

Σε σήματα πεπερασμένης διάρκειας Έστω ότι ένα σήμα έχει πεπερασμένη διάρκεια:

$$x(n) \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

Τότε ο μετασχηματισμός Fourier του θα είναι:

$$X(k) \triangleq \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

για $k = 0, 1, \dots, N-1$

Αυτός ορίζεται ως **Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (Discrete Fourier Transform)**.

Ο **DFT** ενός σήματος με N δείγματα θα έχει, όπως είδαμε παραπάνω, αναγκαστικά και αυτός N αριθμούς πληροφορίας.

Συγκρίνοντάς τον με τον CFTD (συνεχή μετασχηματισμό Fourier σε διακριτό σήμα):

$$X\left(e^{j\omega}\right) \triangleq \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega n}$$

δηλαδή:

$$\underbrace{X(k)}_{\text{DFT}} = \left.\underbrace{X\left(e^{j\omega}\right)}_{\text{CFT}}\right|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}, \quad k = 0, \dots, N-1$$

Όπως παρατηρούμε, ο **DFT είναι στην πραγματικότητα ο δειγματοληπτημένος συνεχής μετασχηματισμός Fourier**.

4.1 Χρήσιμα Σήματα

Παλμοσειρά δειγματοληψίας Το αναλογικό σήμα που χρησιμοποιούμε για δειγματοληψία είναι το γνωστό τραίνο ώσεων:

$$s_{\Delta t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t)$$

Αυτό, στο συνεχή κόσμο, έχει μετασχηματισμό Fourier όπως έχουμε αποδείξει:

$$s_{\Delta t} \xrightarrow{\text{CFT-C}} \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - n\frac{1}{\Delta t}\right)$$

ή, πιο συνοπτικά, το παραπάνω μπορεί να γραφτεί:

$$\boxed{s_{\Delta t} \xrightarrow{\text{CFT-C}} F_s S_{F_s}(f)}$$

όπου ορίσαμε τη **συχνότητα δειγματοληψίας**:

$$\boxed{F_s = \frac{1}{\Delta t}}$$

Παράθυρο

$$W_T(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

Και από το αναλογικό σήμα γνωρίζουμε ότι:

$$\boxed{W_T(t) \xrightarrow{\text{CFT-C}} T\,\mathrm{sinc}(Tf)}$$

όπου $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$, και μάλιστα αν $x \in \mathbb{Z}^* \implies \mathrm{sinc}(x) = 0$, και $x = 0 \implies \mathrm{sinc}(x) = 1$.

Μετατοπισμένο Παράθυρο Για να έχουμε ακολουθίες που ξεκινούν από $n = 0$, χρησιμοποιούμε ένα παράθυρο που βρίσκεται λίγο πιο μπροστά:

$$W_{0,T} = W_T\left(t - \frac{T}{2}\right) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < T \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας ξανά ιδιότητες του αναλογικού σήματος, θα ισχύει:

$$\boxed{W_{0,T}(t) \xrightarrow{\text{CFT-C}} T\,\text{sinc}(Tf)e^{-j2\pi f T/2}}$$

4.2 Η διαδικασία της δειγματοληψίας

Ο υπολογιστής μας μπορεί να αποθηκεύσει μόνον έναν πεπερασμένο αριθμό δειγμάτων. Επομένως, πρέπει:

1. Να *παραθυρώσουμε* με ένα $W_{0,T}$ το σήμα, ώστε να μην εκτείνεται στο άπειρο.
2. Να *δειγματοληπτήσουμε* το σήμα, ώστε να γίνει διακριτό.

Το παραθυροποιημένο και δειγματοληπτημένο σήμα (**sampled & windowed**) ονομάζεται $x_{SW}(t)$. Να σημειωθεί ότι αυτό το σήμα είναι ακόμα αναλογικό, καθώς αποτελείται από συναρτήσεις δ. Για να γίνει ψηφιακό, αρκεί να πάρουμε τις τιμές αυτών των δ.

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά. Δεδομένου ότι $W_{0,T}$ είναι το παράθυρο και $s_{\Delta t}$ η παλμοσειρά της δειγματοληψίας, έχουμε:

$$\begin{aligned} x_{SW}(t) &= x_W(t) \cdot s_{\Delta t}(t) = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \delta(t - n\Delta t) \end{aligned}$$

Στο πεδίο των συχνοτήτων, λαμβάνοντας το *συνεχή* μετασχματισμό Fourier του $x_{SW}(t)$, έχουμε:

$$\begin{aligned} X_{SW}(f) &= \mathscr{F}\left\{x_{SW}(t)\right\} = \mathscr{F}\left\{x(t)W_{0,N\,\Delta t}(t)S_{\Delta t}\right\} \\ &= \mathscr{F}\left\{x(t)\right\} * \mathscr{F}\left\{W_{0,N\,\Delta t}(t) \cdot S_{\Delta t}(\tau)\right\} \\ &= X(f) * \left[N\Delta t\,\text{sinc}(N\Delta tf)e^{-j2\pi f\frac{N\Delta t}{2}}\right] * \left[F_S S_{F_S}(f)\right] \end{aligned}$$

Εδώ παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος που έχει δειγματοληπτηθεί αποτελείται από:

- Το μετασχηματισμό Fourier $X(f)$ του **αρχικού σήματος**
- Την επίδραση της παραθυροποίησης με το sinc
- Την επίδραση της παλμοσειράς S_{F_S}

Με μερικές παραπάνω πράξεις, προκύπτει τελικά:

$$X_{SW}(f) = X(f) * \left[N\,\text{sinc}(N\Delta tf)e^{-j2\pi f N\Delta t/2}\right] * S_{F_S}(f)$$

Παρατηρούμε ότι, αφού το σήμα είναι χρονοπερατό μετά την παραθύρωση, το φάσμα του θα είναι άπειρο. Επομένως, μετά από την εφαρμογή της παλμοσειράς, θα είναι βέβαιο ότι θα υπάρχει επικάλυψη. Για να μειωθεί, αυξ

Έχοντας τώρα ένα ψηφιακό σήμα, μπορούμε να υπολογίσουμε:

$$\begin{aligned}
X_{SW}(f) &= \mathscr{F}\left\{x_{SW}(t)\right\} = \mathscr{F}\left\{\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\delta(t-n\Delta t)\right\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\delta(t-n\Delta t)e^{-j2\pi ft}\,dt = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi f\Delta tn}
\end{aligned}$$

Θέτοντας $f = k\Delta f$, θα ισχύει:

$$\begin{aligned}
X_{SW}(k\Delta f) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi\Delta tn\Delta fk} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}(N\Delta f\Delta t)kn}
\end{aligned}$$

Στην παραπάνω σχέση, μπορούμε **αυθαίρετα να θέσουμε** τους χρόνους δειγματοληψίας και παραθύρωσης ώστε:

$$\boxed{N\Delta f\Delta t = 1}$$

οπότε θα προκύψει:

$$\boxed{X_{SW}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}$$

που είναι ο **ορισμός του DFT** που είχαμε ορίσει και παραπάνω.

Για ένα παράθυρο N δειγμάτων, προκύπτει μια ακολουθία $x(n)$ $n = 0, \dots, N-1$. Εφαρμόζοντας DFT, θα λάβουμε μια ακολουθία $X(\kappa)$, η οποία αποτελείται από *δείγματα του φάσματος* του $X_{SW}(f)$ σε θέσεις και συχνότητες $0,\ \Delta f,\ 2\Delta f,\ \dots,\ (N-1)\Delta f$.

Ισχύει:

$$\Delta f = \frac{1}{N\Delta t}$$

Αυτό που επιθυμούμε είναι:

- **Μικρό** Δf για να έχουμε αρκετά μεγάλη ανάλυση στη συχνότητα, και μια πιο ακριβή αναπαράσταση του πραγματικού μετασχηματισμού Fourier του αρχικού σήματος.
- **Μεγάλο** N, για να περιορίζεται η **φασματική διαρροή (spectral leakage)** που προκύπτει από το πλάτος του παλμού sinc λόγω της παραθύρωσης.
- **Μεγάλο** Δt ώστε να περιορίζεται το **aliasing**.

Η τελική μορφή του DFT είναι:

$$X[k] = \left\{ X(f) * \underbrace{\left[N\,\mathrm{sinc}(N\Delta tf)e^{-j\pi fN\Delta t}\right]}_{L(f)} * \underbrace{S_{F_S}(f)}_{A(f)} \right\}$$

όπου ο όρος $L(f)$ αναφέρεται στη φασματική διαρροή, και ο όρος $A(f)$ αναφέρεται στο aliasing.

Ο DFT κινείται μεταξύ των τιμών 0 και $N-1$, οι οποίες αντιστοιχούν άμεσα στις "ψηφιακές" συχνότητες από 0 ως 2π. Για να τις αντιστοιχήσουμε στις πραγματικές αναλογικές συχνότητες, πρέπει να γνωρίζουμε τη συχνότητα δειγματοληψίας.

Παράδειγμα Δίνεται ένα σήμα:

$$x(t) = e^{j2\pi f_0 t} \rightarrow X(f) = \delta(f - f_0)$$

δειγματοληπτείται με συχνότητα δειγματοληψίας F_s. Παίρνουμε N δείγματα $0, \Delta t, \ldots, (N-1)\Delta t$, όπου $\Delta t = \frac{1}{F_s}$.

Τότε:

$$X[k] = \left[N \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(f - f' - nF_s)\,\mathrm{sinc}(N\Delta t f')e^{-jnf'N\Delta t}\,df' \right]_{f=k\Delta f}$$
$$= N \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}\left(N\Delta t(k\Delta f - f_0 - nFs)\right) e^{-jn(k\Delta f - f_0 - nF_s)N\Delta t}$$

Ο όρος $k\Delta f - f_0 - nFs$ εκφράζει τη διαφορά της πραγματικής συχνότητας που υπάρχει στο σήμα, από τη συχνότητα επάνω στην οποία κάνουμε δειγματοληψία του Fourier εμείς. Αν τύχει και πέσουμε ακριβώς επάνω στη σωστή συχνότητα, η sinc δε θα επιδράσει και θα έχουμε ένα καθαρό φάσμα. Όμως αν έχουμε μια μικρή διαφορά, θα "γεμίσουν" κι άλλες συχνότητες στο φάσμα, οι οποίες όμως στο αρχικό σήμα δεν είχαν πληροφορία.

Διάλεξη 11η
9/11/2018

4.3 Aliasing (φασματική επικάλυψη)

Ο παράγοντας $A(f)$ αποτελεί ένα "παράσιτο" που εισάγεται στο σήμα μετά από τον πολλαπλασιασμό του με την παλμοσειρά των δ. Στο ψηφιακό σήμα δεν μπορεί να γίνει 0, καθώς τα φάσματά μας είναι άπειρα, αφού τα σήματα είναι *ζωνοπερατά* (όπως αποδείχθηκε στο αναλογικό σήμα).

Στην ιδανική περίπτωση που το σήμα $x(t)$ είναι *ζωνοπερατό*, η επικάλυψη μπορεί να καταργηθεί με συχνότητα δειγματοληψίας $F_s > 2F_{max}$ (συνθήκη Nyquist) (πρωτογενής επικάλυψη).

Στην περίπτωση που το σήμα *δεν* είναι ζωνοπερατό υπάρχει οπωσδήποτε επικάλυψη, η οποία μπορεί μόνο να *μειωθεί* αυξάνοντας τη συχνότητα δειγματοληψίας F_s (δευτερογενής επικάλυψη).

4.4 Spectral leakage (φασματική διαρροή)

Ο δεύτερος "ενοχλητικός" όρος είναι ο $L(f)$:

$$L(f) = N\,\mathrm{sinc}(N\,\Delta t\,f)e^{j\pi\,f\,N\,\Delta t}$$

το φάσμα του οποίου συνελίσσεται με το αρχικό φάσμα $X(f)$.

Για παράδειγμα, όταν έχουμε ένα "ημίτονο" $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$, τότε το παραθυρωμένο σήμα θα έχει φάσμα:

$$X(f) * L(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f - f')L(f)\,df' = N\,\mathrm{sinc}\left(N\,\Delta t(f - f_0)\right) e^{-j\pi(f-f_0)N\Delta t}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα σημαίνει πως το φάσμα που θα προκύψει δεν θα αποτελείται απλώς από μία δ πάνω στο f_0, αλλά πάνω στην f_0 θα κάθεται μία sinc. Φασματικό περιεχόμενο δεν θα εμφανίζεται μόνο στην f_0, αλλά και γύρω από αυτήν, ενώ δεν υπήρχε μεγαλύτερο σήμα. Αυξάνοντας το μέγεθος N του παραθύρου, στενεύει και η επίδραση της sinc.

Άσκηση: Παλιό θέμα

Έστω ένα σήμα:

$$x_a(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)$$

(υποθέτουμε πως από τη φυσική του συστήματος γνωρίζουμε πως είναι δύο τα ημίτονα).

Το δειγματοληπτούμε με συχνότητα $F_s = 360\,\mathrm{Hz}$ για διάρκεια $N = 2400$ samples.

Διαπιστώνουμε ότι το φάσμα του DFT είναι:

$$X[k] = \begin{cases} \neq 0, & \text{για } k = 200,\ k = 800,\ k = 1600,\ k = 2200 \\ = 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Ποιές είναι οι μικρότερες πιθανές τιμές των f_1, f_2;

Λύση

Μετά από τη δειγματοληψία, θα δημιουργηθεί ένα σήμα $x[n]$ με $n = 0, 1, \dots, 2399$. Με εφαρμογή του DFT (Discrete Fourier Transform), θα δημιουργηθεί το φάσμα $X[k]$ με $k = 0, 1, \dots, 2399$.

Από το γνωστό τύπο $N\,\Delta t\,\Delta f = 1$, έχουμε:

$$\Delta f = \frac{1}{N\,\Delta t} = \frac{F_s}{N}$$

Επομένως, για όλες τις τιμές του φάσματος:

$$\begin{aligned} f_1 &= k_1 \Delta f = 200 \cdot \frac{360}{2400} = 30\,\text{Hz} \\ f_2 &= k_2 \Delta f = 800 \cdot \frac{360}{2400} = 120\,\text{Hz} \\ f_3 &= k_3 \Delta f = 1600 \cdot \frac{360}{2400} = 240\,\text{Hz} \\ f_4 &= k_4 \Delta f = 2200 \cdot \frac{360}{2400} = 330\,\text{Hz} \end{aligned}$$

Εφ' όσον ζητάμε τις ελάχιστες δυνατές συχνότητες, απαντάμε με 30 Hz και 120 Hz. Ο περιορισμός αυτός που δίνει η εκφώνηση ουσιαστικά δηλώνει ότι δεν έχουμε πρωτογενές aliasing, δηλαδή ότι η συχνότητα της δειγματοληψίας είναι σωστά επιλεγμένη, ώστε να είναι διπλάσια αυτής του γρηγορότερου ημιτόνου, και να ικανοποιείται το κριτήριο του Nyquist.

Αν δεν υπήρχε ο συγκεκριμένος περιορισμός μάλιστα, οι δυνατές απαντήσεις θα ήταν *άπειρες* σε πλήθος. Μία μεγαλύτερη συχότητα μπορεί να εμφανίσει alias στην "ορατή" περιοχή $k \in (0, 1200)$. Για παράδειγμα, αν x είναι μια συχνότητα, τότε θα πέφτουμε πάνω στα 30 Hz όταν:

$$30 = x + \kappa 360$$

Δηλαδή για $x = 30, 390, 750, \dots$ Μάλιστα παρατηρούμε ότι οι συχνότητα 330 Hz που βρήκαμε παραπάνω δεν εμφανίζεται καν σαν πιθανή αρχική συχνότητα του σήματος.

Διάλεξη $12^{η}$
12/11/2018

4.5 Under-Sampling (Υποδειγματοληψία)

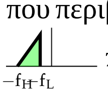
Έστω ότι έχουμε ένα σήμα σε μεγάλη συχνότητα, δηλαδή στο 1 GHz, το οποίο όμως έχει μικρό εύρος ζώνης, της τάξης των 0.01 GHz.

Για να δειγματοληπτήσουμε αυτό το σήμα κανονικά, θα πρέπει να έχουμε συχνότητα δειγματοληψίας f_s:

$$f_s > 2f_max = 2f_H = 2.02\,\text{GHz}$$

Αυτή όμως η συχνότητα είναι τεράστια για ένα σήμα το οποίο έχει τόσο μικρό εύρος ζώνης! Επομένως θα προσπαθήσουμε να βρούμε ένα trick για να αποφύγουμε αυτόν τον περιορισμό, χωρίς να έχουμε επικάλυψη του δειγματοληπτημένου σήματος στο φάσμα.

Αφού εφαρμοστεί η δειγματοληψία, αν δεν υπάρχει επικάλυψη, το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος θα μοιάζει ως εξής:

Εδώ υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα δεξί "πλακίδιο" που περιβάλλεται από δύο αριστερά πλακίδια. Το αριστερό πλακίδιο προκύπτει από το *αντίγραφο* του αρχικού 

που, λόγω της παλμοσειράς, μετατοπίστηκε κατά μια *ακέραια* σταθερά κ και $\kappa+1$.

Για να μην υπάρχει επικάλυψη, θα πρέπει να μην "χτυπούν" τα 3 πλακίδια:

$$\begin{cases} \kappa f_s - f_L \leq f_L & \implies f_s \leq \frac{2f_L}{\kappa} \\ (\kappa+1)f_S - f_H \geq f_s & \implies \geq \frac{2f_H}{\kappa+1} \end{cases}$$

άρα:

$$\frac{2f_H}{\kappa+1} \leq f_s \leq \frac{2f_L}{\kappa} \implies$$
$$\frac{2f_H}{\kappa+1} \leq \frac{2f_L}{\kappa} \implies \kappa f_H \leq (\kappa+1)f_L \implies$$
$$\kappa(f_H - f_L) \leq f_L \implies \kappa \leq \frac{f_L}{f_H - f_L} \in \mathbb{N}$$

Αυτό που θέλουμε είναι να έχουμε *ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας* f_s (καθώς είναι πιο εύκολη η φυσική υλοποίηση), οπότε επιλέγουμε το μέγιστο κ:

$$\kappa^* = \left\lfloor \frac{f_L}{f_H - f_L} \right\rfloor$$

και μπορούμε να επιλέξουμε απλώς μια f_s που να ικανοποιεί το κριτήριο που βρήκαμε παραπάνω:

$$\frac{2f_H}{\kappa^*+1} \leq f_s \leq \frac{2f_L}{\kappa^*}$$

Κριτήριο Nyquist Για ένα χαμηλοπερατό σήμα (δηλαδή με ελάχιστη συχνότητα $f_L = 0$), αν εφαρμόσουμε τον παραπάνω τύπο, θα πρέπει να λάβουμε το γνωστό κριτήριο του Nyquist. Πράγματι:

$$\kappa^* = \left\lfloor \frac{f_L}{f_H - f_L} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{f_H} \right\rfloor = 0$$

άρα η συχνότητα δειγματοληψίας είναι:

$$\frac{2f_H}{0+1} \leq f_s \leq \frac{2f_L}{0} \implies \boxed{f_S \geq 2f_H}$$

Στη γενική περίπτωση, αν $\kappa^* = \left\lfloor \frac{f_L}{f_H - f_L} \right\rfloor > 0$, τότε:

$$\frac{2f_H}{\left\lfloor \frac{f_L}{f_H - f_L} \right\rfloor + 1} \leq f_s \leq \frac{2f_L}{\left\lfloor \frac{f_L}{f_H - f_L} \right\rfloor}$$
$$\implies 2(f_H - f_L) \leq f_s \leq 2(f_H + f_L) \implies \boxed{f_s > 2(f_H - f_L)}$$ (γενικότερο κριτήριο Nyquist)

Αν βέβαια το floor δεν είναι 0.

Επομένως, στο παραπάνω παράδειγμα:

$$f_H - f_L = 1.01 - 1 = 10\,\text{MHz}$$

θα είναι $f_s = 2(f_H - f_L) = 20\,\text{MHz}$

Άσκηση

Δίνεται η σχέση:

$$\frac{x-1}{x-2} = \frac{x-a}{x-6}$$

Να βρεθούν οι ακέραιοι $a \in \mathbb{Z}$, για τους οποίους η παραπάνω σχέση να καθιστά το $x \in \mathbb{Z}$ ακέραιο.

Λύση

Κάνουμε πράξεις στη δοθείσα σχέση:

$$(x-1)(x-6) = (x-2)(x-a)$$

άρα έχουμε:

$$x^2 - 7x + 6 = (-2-a)x + 2a \implies x(a-5) = 2a - 6 \implies$$
$$x = \frac{2a-6}{a-5} = \frac{2a-10+4}{a-5} = 2 + \underbrace{\frac{4}{a-5}}$$

Για να είναι ο x ακέραιος, θα πρέπει και το κλάσμα $\frac{4}{a-5}$ να είναι ακέραιο, δηλαδή το $a-5$ να είναι διαιρέτης του 4. Τα a που το ικανοποιούν αυτό είναι:

$$(a-5) = -4, -2, -1, 1, 2, 4 \implies \underline{a = 1, 3, 4, 6, 7, 9}$$

4.6 Διακριτές σχέσεις Kramers-Kronig

Έστω μια *αιτιατή* ακολουθία $x(n) \in \mathbb{R}$ ($x(n) = 0 \quad \forall n > 0$)
Γνωρίζουμε
ότι ένα σήμα μπορεί να γραφτεί σαν άθροισμα ενός άρτιου και ενός περιττού μέρους:

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

άρα, μετασχηματίζοντας κατά Fourier (που έχει ένα πραγματικό και ένα φανταστικό μέρος):

$$X(e^{j\omega}) = X_R\left(e^{j\omega}\right) + jX_I\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e(n)e^{-j\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o(n)e^{-j\omega n}$$

Επιπλέον, εκμεταλλευόμενοι την αρτιότητα & περιττότητα των sin & cos:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} x_e \cdot \cos \neq 0 \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} x_e \cdot \sin = 0 \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} x_o \cdot \cos = 0 \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} x_o \cdot \sin = 0$$

Άρα τελικά:

$$X_R\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e(n)e^{-j\omega n} \implies x_e(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_R\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}\,d\omega$$

Ομοίως:

$$jX_I\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o(n)e^{-j\omega n} \implies x_0(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} jX_I\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega}\,d\omega$$

Άρα τελικά:

$$\boxed{\begin{aligned} x(n) &= x_e(n) + x_o(n) \\ x(-n) &= x_e(-n) + x_o(-n) = x_e(n) - x_o(n) \end{aligned}}$$

Και, όταν το n είναι θετικό ($n > 0$):

$$\boxed{\begin{aligned} x(n) &= x_e(n) + x_o(n) \\ 0 &= x_e(n) - x_o(n) = x_e(n) - x_o(n) \end{aligned}} \implies \boxed{\begin{aligned} x(n) &= 2x_e(n) \\ x(n) &= 2x_o(n) \end{aligned}}$$

Ενώ, επάνω στο $n = 0$, οι σχέσεις γίνονται:

$$\left.\begin{aligned} x(0) &= x_e(0) + \cancelto{0}{x_o(0)} \\ x(0) &= x_e(0) - \cancelto{0}{x_o(0)} \end{aligned}\right\} \implies \boxed{x(0) = x_e(0)}$$

Τελικά:

$$\boxed{x(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \quad \text{(αιτιατότητα)} \\ x_e(0) & n = 0 \\ 2x_e(n) = 2x_o(n) & n > 0 \end{cases}}$$

Οι παραπάνω σχέσεις δηλώνουν πως γνωρίζοντας μόνο το άρτιο ή περιττό κομμάτι μιας αιτιατής & πραγματικής ακολουθίας, μπορούμε να τη βρούμε ολόκληρη (εκτός από την τιμή $n = 0$, που απαιτεί το άρτιο κομμάτι).

Τα παραπάνω οδηγούν στο εξής συμπέρασμα:

Πόρισμα 4.1

Αν $x(n) \in \mathbb{R}$ ένα *αιτιατό* σήμα:

α) Αν μας δίνεται μόνο το πραγματικό μέρος του μετασχηματισμού Fourier $X_R\left(e^{j\omega}\right)$ του, τότε μπορώ να βρω το $x(n)$ ως εξής:

$$x(n) = \begin{cases} 2x_e(n) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_R\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n}\, d\omega & n > 0 \\ x_e(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_R\left(e^{j\omega}\right) d\omega & n = 0 \end{cases}$$

β) Αν μας δίνεται μόνο το φανταστικό μέρος του μετασχηματισμού Fourier $X_I\left(e^{j\omega}\right)$, έχουμε:

$$x(n) = \begin{cases} 2x_O(n) = \frac{j}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_I\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n}\, d\omega & n > 0 \\ x(0) = \text{άγνωστο} & n = 0 \end{cases}$$

Τα παραπάνω δηλώνουν ότι αν έχουμε ένα **πραγματικό σήμα**, ο μετασχηματισμός Fourier του (που περιέχει πραγματικό+φανταστικό μέρος) περιέχει **διπλάσια πληροφορία απ' όση χρειάζεται**. Και αυτό, επειδή μπορούμε μόνο από το **πραγματικό μέρος** του Fourier να λάβουμε **ολόκληρο το σήμα**. Αυτό όμως δεν ισχύει σε μιγαδικά σήματα.

Άσκηση

Έστω ένα πραγματικό αιτιατό σήμα με πραγματικό μέρος Fourier:

$$X_R\left(e^{j\omega}\right) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \pi/2 \\ 0 & \pi/2 < |\omega| < \pi \end{cases}$$

Να ανακτηθεί το $x(n)$.

Λύση

Από το πόρισμα
, έχουμε:

$$\begin{aligned} x(n) &= 2x_e(n) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_R\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}\,d\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{j\omega n}\,d\omega = \frac{1}{jn\pi}e^{j\omega n}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{jn\pi}\left(e^{jn\pi/2} - e^{-jn\pi/2}\right) = \frac{2}{\pi n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Και για την τιμή στο $x(0)$:

$$x(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_R\left(e^{j\omega}\right)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\,d\omega = \frac{1}{2}.$$