Εφαρμοσμένα Μαθηματικά - Σημειώσεις

https://github.com/kongr45gpen/ece-notes

2016

Περιεχόμενα

`http://users.auth.gr/natreas`

Σημειώσεις: Ατρέας Κεφ. 3-4-5

Κεχαγιάς Κεφ. 1-2-6

Βιβλία:

- Churchill - Brown (για μηχανικούς)
- Marsden (πιο μαθηματικό)

Μέρος I
Ατρέας

Κεφάλαιο 1 Μιγαδικοί Αριθμοί

γεωμετρική παράσταση μιγαδικού

Έστω $\mathbb{C} = \left\{ z = (x, y);\ x, y \in \mathbb{R} \right\}$

Είναι σύνολο εφοδιασμένο με τις πράξεις:

(α) Πρόσθεση μιγαδικών

Αν $z_1 = (x_1, y_1)$ και $x_2 = (x_2, y_2)$, τότε:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$$

(β) Γινόμενο $\lambda \in \mathbb{R}$ με μιγαδικό z

Αν $z = (x, y)$, τότε ορίζω:

$$\lambda z = (\lambda x,\ \lambda y)$$

(γ) Πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών

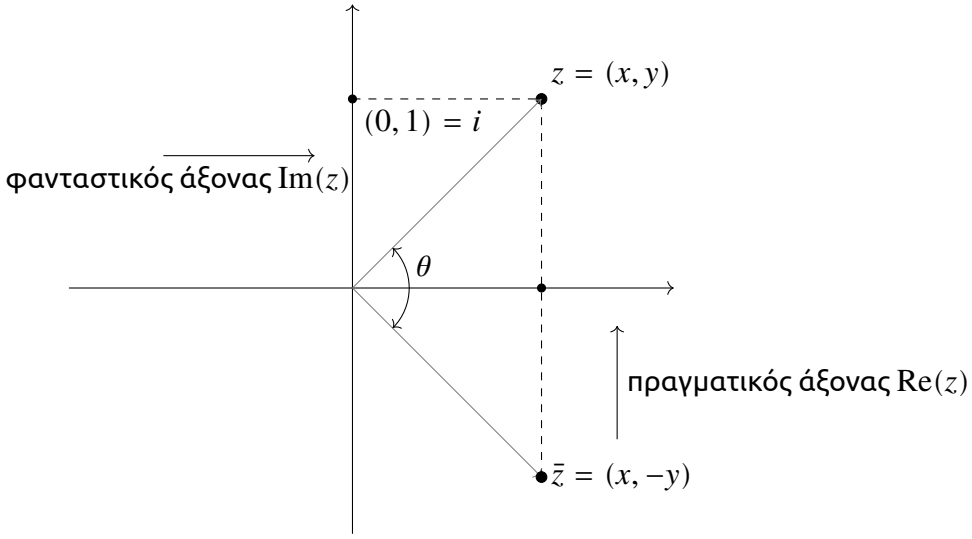
Αν $z_1 = (x_1, y_1),\ z_2 = (x_2, y_2)$, τότε ορίζω:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Καλείται σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

- Δεν μπορώ να συγκρίνω μιγαδικούς
- Οι γνωστές ιδιότητες των πράξεων ισχύουν στους μιγαδικούς

Η γεωμετρική παράσταση του $\mathbb{C}$ είναι το λεγόμενο μιγαδικό επίπεδο.



$$x \in \mathbb{R} \overset{1\text{-}1}{\longleftrightarrow} A = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$$

- $(x,0),(y,0) \in A \implies (x,0)+(y,0) = (x+y,0) \in A$
- $(x,0)(y,0) = (xy,0) \in A$

Στο εξής γράφω:

$$1 = (1,0)$$
$$x = (x,0)$$

Ορίζω:

$$i = (0,1)$$

και καλείται φανταστική μονάδα του μιγαδικού επιπέδου.

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1,\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1,0) = -1$$
$$\boxed{i^2 = -1}$$

Έτσι:

$$z = (x,y) = x(1,0) + y(0,1)$$
$$\overset{x=(x,0)}{\underset{i=(0,1)}{=}} x\cdot 1 + yi$$
$$\implies \boxed{z = x + iy}$$

$$\underbrace{z = x + iy}_{\text{άλγεβρα}} \iff \underbrace{z = (x,y)}_{\text{γεωμετρία}}$$

Έστω $z = x + iy$

$$\overset{\text{πολικές}}{\underset{\text{του } (x,y)}{=}} \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta =$$
$$= \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{1}$$

Έτσι, η (1) γράφεται ως:

$$z = |z|\underbrace{(\cos\theta + i\sin\theta)}$$
$$= |z|\cdot e^{i\theta}$$

όπου στο εξής:

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$
$$\boxed{\text{τύπος του Euler}}$$

Τελικά:

$$\boxed{z = |z|e^{i\theta}}$$ (πολική μορφή μιγαδικών)

Σημείωση: $\cos\theta + i\sin\theta$

$$\overset{\text{σειρές}}{\underset{\text{McLaurin}}{=}} \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right)$$

$$\overset{i^2=-1}{=} \left(1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots\right) + \left(i\theta + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots\right)$$

$$= 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \dots = e^{i\theta}$$

- Ορίζω πρωτεύον όρισμα $\mathrm{Arg} z$ (μη μηδενικού) μιγαδικού z να είναι η γωνία θ που σχηματίζει ο θετικός πραγματικός ημιάξονας του $\mathbb{C}$ με την ημιευθεία OA, όπου A το σημείο της γεωμετρικής παράστασης του $z = x + iy$.

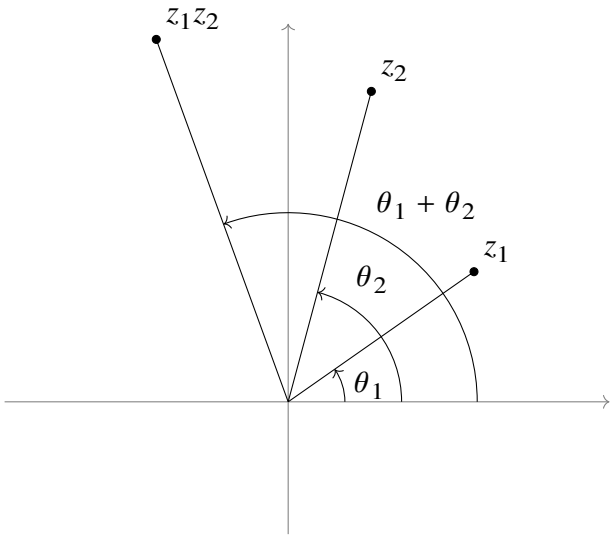
Έτσι:

$z = |z|e^{i\,\mathrm{Arg}\,z}$ πολική μορφή του z

$$z_1 z_2 = |z_1|e^{i\,\mathrm{Arg}\,z_1}|z_2|e^{i\,\mathrm{Arg}\,z_2}$$

$$\boxed{z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\mathrm{Arg}\,z_1 + \mathrm{Arg}\,z_2)}}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}$$
$$= \left|\frac{z_1}{z_2}\right| e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$



Ιδιότητα: $z\bar{z} = |z|^2$

Κεφάλαιο 2 Μιγαδικές συναρτήσεις

Κάθε συνάρτηση $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ καλείται μιγαδική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής.

$$f = \underbrace{f(\underbrace{z}_{\text{η μεταβλητή μιγαδικός}})}_{\text{μιγαδική συνάρτηση διότι έχει τιμή μιγαδική}}$$

π.χ.

$$f(z) = z^2 \implies f(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 + (iy)^2 + 2x \cdot \underbrace{x^2 - y^2}_{\mathrm{Re}(f)} + i\,\underbrace{(2xy)}_{\mathrm{Im}(f)}$$

$$\underset{\text{μορφή}}{\overset{\text{γεωμετρική}}{=}} (x^2 - y^2,\ 2xy)$$

Τελικά: $\boxed{f(x,y) = (x^2 - y^2,\ 2xy)}$ $\quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

π.χ.

$$f(z) = \frac{1}{|z|\bar{z}} \overset{z=x+iy}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{z}{\bar{z}z}$$

$$\overset{z\bar{z}=|z|^2}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{z}{|z|^2} = \frac{x+iy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\overset{\text{γεωμ}}{=} \frac{(x,y)}{(x^2+y^2)^{3/2}} \overset{\vec{r}=(x,y)}{=} \boxed{\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}}$$

Κεντρικό διαν. πεδίο που θυμίζει το πεδίο Coulomb.

$$\underbrace{f = f(z)}_{\text{μιγαδική μιγ. μεταβλ.}} \xleftrightarrow{\text{1-1}} \begin{array}{l} \text{διανυσμ. πεδίο του } \mathbb{R}^2 \\ F(x,y) = \big(u(x,y),\ v(x,y)\big) \end{array}$$

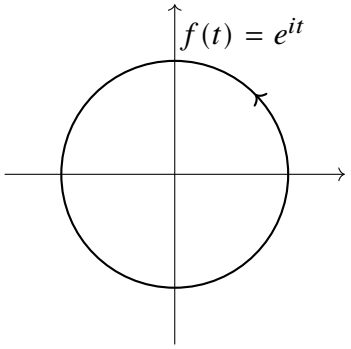
όπου u, v πραγματ. συναρτ. 2 μεταβλητών

Υπάρχουν $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, μιγαδικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής

π.χ

$$f(t) = e^{it},\ t \in (0, \pi]$$
$$= \cos t + i \sin t$$

$t \to (\cos t, \sin t)$ καμπύλη $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$



Η γραφ. παράσταση της $f(t) = e^{it},\ t \in (-\pi, \pi)$ είναι ο μοναδιαίος κύκλος κέντρου $(0,0)$ με αντιωρολογιακή φορά.

$$g(t) = 1 + it, t \in \mathbb{R}, = (1, t) = (1,0) + t(0,1)$$

Το πεδίο ορισμού μιγαδικών συναρτήσεων μιγαδ. μεταβλητών υπολογίζεται ως συνήθως (με τις πραγματικές συναρτήσεις) ΜΕ ΚΑΠΟΙΕΣ Διαφοροποιήσεις

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

Πρέπει ο παρον. να είναι διάφορος του μηδενός: Έτσι $z \neq 0$ Άρα Π.Ο = $\mathbb{C} - \{(0,0)\}$

$$g(z) = \frac{z}{z^2+2}$$

Σημείωση Η g είναι **ρητή** συνάρτηση (δηλ. πηλίκο δύο (μιγαδικών) πολυωνύμων).
Κάθε συνάρτηση της μορφής $a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n,\ a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ καλείται (μιγαδικό) πολυώνυμο.
Πρέπει παρον. $\neq 0$ δηλ:

$$z^2 + 2 = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \textbf{ΠΡΟΣΟΧΗ!!} \text{ Κάθε μιγαδικό} \\ \text{πολυώνυμο βαθμού } N \text{ έχει} \\ \text{ΑΚΡΙΒΩΣ } N \text{ ρίζες στο } \mathbb{C} \end{array} \right)$$

$$z^2 + 2 = 0 \xRightarrow{i^2=-1} z^2 - 2i^2 = 0$$
$$\Longrightarrow \left(z - \sqrt{2}i\right)\left(z + \sqrt{2}i\right) = 0$$
$$\Longrightarrow \boxed{z = \pm\sqrt{2}i}$$

Τελικά Π.Ο = $\mathbb{C} - \left\{\pm\sqrt{2}i\right\}$

$$\boxed{h(z) = \operatorname{Arg} z,\ \text{Π.Ο} = \mathbb{C} - \{0\}}$$

Για $z = 0$ ΔΕΝ ορίζεται όρισμα, επειδή $0 = |0| \cdot e^{i\theta}\ \forall \theta$

Σημείωση $az^2 + bz + c = 0$
$a, b, c \in \mathbb{C}$
Λύνεται με διακρίνουσα κατά τα γνωστά.
Επίσης μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και σχήμα Horner για πολυώνυμα (με πραγματικούς συντελεστές) βαθμού $N \geq 3$.

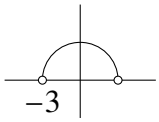
$$\begin{aligned} a(z) &= e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} \\ &= e^x(\cos y + i \sin y) \\ &= \left(e^x \cos y,\ e^x \sin y\right), \quad x, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ως διανυσματικό πεδίο προφανώς Π.Ο = $\mathbb{R}^2$
Έτσι Π.Ο = $\mathbb{C}$.

$l(z) = \mathrm{Log}$ (αντίστροφη της e^z)

$$\underbrace{\mathrm{Log}}_{\text{μιγαδικός λογάριθμος}} \overset{\text{ορισμός}}{:=} \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\,z$$

Π.Ο $= \mathbb{C} - \{0\}$



$$\begin{aligned}\mathrm{Log}(-3) &= \ln|-3| + i\,\mathrm{Arg}(-3)\\ &= \ln 3 + i\pi\end{aligned}$$

$$\lambda(z) = \sin z \overset{\text{ορισμός}}{:=} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\left(\begin{array}{ll} e^{i\theta} & = \cos\theta + i\sin\theta \quad \theta \in (-\pi, \pi] \\ e^{-i\theta} & = \cos\theta - i\sin\theta \\ \hline \sin\theta & = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{array}\right)$$

Π.Ο = $\mathbb{C}$

$$m(z) = \cos z \overset{\text{ορισμός}}{:=} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Π.Ο $= \mathbb{C}$

Όλες οι γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες ισχύουν στο $\mathbb{C}$ όπως στο $\mathbb{R}$.

$$h(z) = \sqrt[n]{z} := \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{2k\pi + \mathrm{Arg}\,z}{n}} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

(Η $\sqrt[n]{a}$ ορίζεται ως το **σύνολο** όλων των λύσεων της εξίσωσης $z^n = a, \quad a \in \mathbb{C}$)

Π.Ο $= \mathbb{C} - \{0\}$

2.1 Όριο/Συνέχεια μιγαδικών συναρτήσεων μιγαδικής μεταβλητής

Ορισμός

Έστω $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ μιγ. συνάρτηση ορισμένη σε σύνολο $A \subset \mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0$ είναι σ.συσσ. του A και έστω $a = a_0 + ib_0$. Τότε

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a \in \mathbb{C}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = a_0 \\ \textbf{ΚΑΙ} \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = b_0 \end{cases}$$

Επίσης, αν $z_0 \in A$, τότε
f συνεχής στο σημείο z_0

$\Updownarrow$

οι συναρτήσεις $u, v : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι ΣΥΝΕΧΕΙΣ στο σημείο $(x_0, y_0$ (ως πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών)

Έτσι:

$$\left.\begin{array}{l} \text{οι πολυωνυμικές} \\ \text{η εκθετική} \\ \text{οι τριγωνομετρικές } (\sin z, \cos z) \\ \text{οι υπερβολικές } (\mathrm{ch}, \mathrm{sh}) \end{array}\right\} \text{συνεχείς στο } \mathbb{C}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{οι ρητές} \\ \text{οι τριγωνομετρικές } (\tan z, \cot z) \end{array}\right\} \text{συνεχείς στο } \textbf{πεδίο ορισμού τους}$$

Ορίζω το ∞ του μιγαδικού επιπέδου να είναι το σύνολο σημείων που απέχουν "άπειρη" απόσταση από την αρχή των αξόνων.

Το επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο ορίζεται ως:

$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, όπου:

$$\infty + z = \infty \quad \forall z \in \mathbb{C}$$
$$\infty \cdot z = \infty \quad \forall z \neq 0$$
$$\frac{z}{\infty} = 0 \quad \forall z \neq \infty$$

Όλες οι πράξεις του ορίου που ξέρετε ισχύουν και στους μιγαδικούς (αρκεί να μην εμφανίζονται οι γνωστές απροσδιόριστες μορφές):

$$0 \cdot \infty, \frac{\infty}{\infty}, 0^0, 1^\infty, \infty^0$$

Ο κανόνας De l' Hospital ισχύει στους μιγαδικούς.

Σημείωση:

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = a \in \mathbb{C} \iff \lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = a \in \mathbb{C}$$

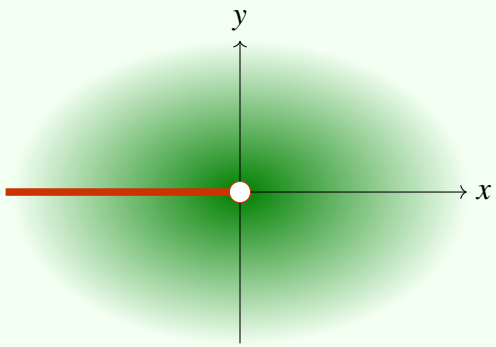
$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \iff \lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$$

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = 0 \iff \lim_{z\to z_0} |f(z)| = 0$$

Θεώρημα

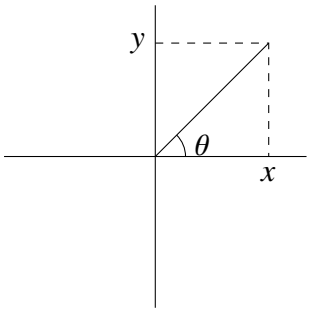
Έστω $\operatorname{Arg} z : \mathbb{C} - \{0\} \to (-\pi, \pi]$
Τότε η $\operatorname{Arg} z$ **είναι συνεχής** στο σύνολο:

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{x + iy : x \leq 0 \text{ ΚΑΙ } y = 0\}$$

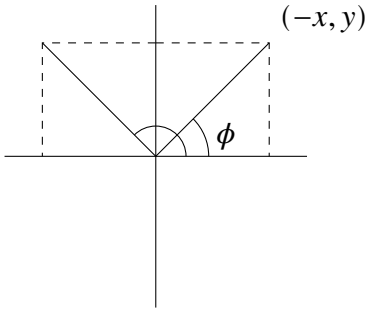


Έστω $z = x + iy$

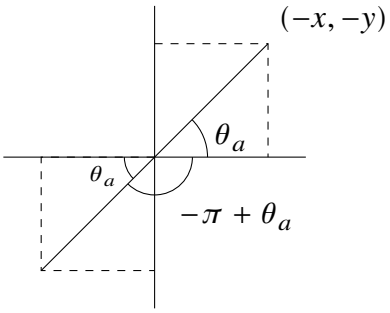
(α) $x > 0,\ y > 0$



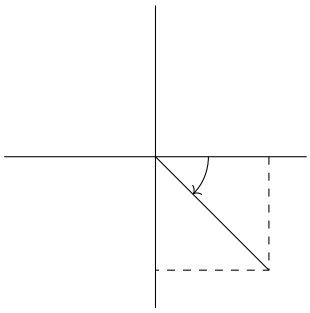
(β) $x < 0,\ y > 0$



(γ) $x < 0,\ y < 0$



(δ) $x > 0,\ y < 0$



$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \arctan\left|\frac{y}{x}\right|, & x, y > 0 \\ \pi - \arctan\left|\frac{y}{x}\right|, & x < 0,\ y > 0 \\ -\pi + \arctan\left|\frac{y}{x}\right|, & x < 0,\ y < 0 \\ -\arctan\left|\frac{y}{x}\right|, & x > 0,\ y < 0 \end{cases}$$

Για $\begin{array}{ll} x = 0, & \text{τότε } \operatorname{Arg} := \frac{\pi}{2} \text{ ή } -\frac{\pi}{2} \\ y = 0, & \text{τότε } \operatorname{Arg} := 0 \text{ ή } \pi \end{array}$

Σημεία ασυνέχειας του $\operatorname{Arg} z$

Έστω $z_0 = x_0 < 0$

- Έστω $z = x_0 + it \quad (t > 0)$

  Για $t \to 0^+$, $z \to z_0 = x_0$, αλλά:

$$\lim_{z \to z_0} \operatorname{Arg} z \overset{z = x_0 + it}{=} \lim_{t \to 0^+} \operatorname{Arg}(x_0 + it) \overset{\text{2ο τετ.}}{=} \lim_{t \to 0^+} \left(\pi - \arctan\left|\frac{t}{x_0}\right| \right) = \pi - \arctan 0 = \pi$$

- Για $z = x_0 + it \quad (t < 0)$, τότε:

  $t \to 0^-, \quad z \to z_0,$ και

$$\lim_{z \to z_0} \operatorname{Arg} z = \lim_{t \to 0^-} \operatorname{Arg}(x_0 + it) \overset{\text{3ο τετ.}}{=} -\pi + \arctan 0 = -\pi$$

Άρα το όριο στο $z_0 = x_0$ ΔΕΝ υπάρχει, και έτσι η $\operatorname{Arg} z$ ασυνεχής στα $z = x_0$ με $x_0 \leq 0$.

Αν $\operatorname{Arg} z \in [0, 2\pi)$ πού είναι ασυνεχής;

2.2 Μιγαδική παράγωγος

Ορισμός

Έστω $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, A ανοικτό, $z_0 \in A$. Λέμε ότι η f είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη στο σημείο z_0, αν υπάρχει το ΟΡΙΟ:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = a \in \mathbb{C}$$

(ή ισοδύναμα $\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = a \in \mathbb{C}$)

Στο εξής το όριο αυτό συμβολίζουμε με $f'(z_0)$ ή $\frac{\mathrm{d}f(z_0)}{\mathrm{d}z}$

Ορισμός

Αν $f : A \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, A ανοικτό, $z_0 \in A$, θα λέμε στο εξής ότι η f είναι ΟΛΟΜΟΡΦΗ (ή ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ - holomorphic/analytic) **στο σημείο** z_0, εάν η f είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη **ΣΕ ΚΑΘΕ ΣΗΜΕΙΟ** του ανοικτού δίσκου 

$$D_\epsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \epsilon\}$$

για κάποιο $\epsilon > 0$

Αν f ολόμορφη σε ΚΑΘΕ σημείο του A λέμε ότι η f ολόμορφη στο A.

Ορισμός

Αν A μη ανοικτό, λέμε ότι η f ολόμορφη στο A, αν υπάρχει $B \supset A$, B ανοικτό ώστε η f να είναι ολόμορφη στο B.

Όλες οι γνωστές ιδιότητες της παραγώγου που γνωρίζετε ισχύουν και για τη μιγαδική παράγωγο.

π.χ. Έστω f, g **μιγαδικά** παραγωγίσιμες σε σημείο z_0. Τότε:

- f παραγ. στο $z_0 \implies f$ συνεχής στο z_0
- $\left(af \pm by\right)'(z_0) = af'(z_0) + bg'(z_0)\ \forall a, b \in \mathbb{C}$
- $\left(fg\right)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)} \quad (g(z_0) \neq 0)$
- Ο κανόνας αλυσίδας ισχύει στις μιγαδικές συναρτήσεις:

$$\left(h \circ g\right)'(z_0) = h'\left(g(z_0)\right)g'(z_0)$$

υπό την προϋπόθεση ότι η σύνθεση καλά ορισμένη

Παραγώγιση αντίστροφης συνάρτησης Έστω f ολόμορφη σε σημείο z_0 με $f'(z_0) \neq 0$.
Αν $w_0 = f(z_0)$, τότε υπάρχουν $\epsilon, \epsilon' > 0$ ώστε η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : \mathrm{D}_\epsilon(w_0) \to \mathrm{D}_{\epsilon'}(z_0)$ καλά ορισμένη, ολόμορφη στο w_0 και

$$\left(f^{-1}\right)'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$$

Θεώρημα: Εξισώσεις Cauchy-Riemann

Έστω $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} : f(z) = f(x+iy) = u(x+y) + iv(x,y)$.
Θεωρώ $z = x+iy,\ z_0 = x_0 + iy_0$ και A ανοικτό.
Τότε:
f μιγαδικά παραγωγίσιμη στο z_0

$$\Updownarrow$$

(α) Η $\mathrm{F}(x,y) = (u(x,y),\ v(x,y))$ είναι **διαφορίσιμο** διανυσμ. πεδίο στο σημείο (x_0, y_0)

$$\boxed{\text{ΚΑΙ}}$$

(β)

$$\begin{cases} u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) \\ u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0) \end{cases} \xleftarrow{\text{εξισώσεις C-R}}$$

Πόρισμα (ΠΡΑΚΤΙΚΟΤΑΤΟ) Αν $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ είναι έτσι ώστε:

(α) u, v έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στο (x_0, y_0) και "κοντά" στο (x_0, y_0)

(β) $\begin{cases} u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) \\ u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0) \end{cases} \xleftarrow{\text{C-R}}$

Τότε ($\Longrightarrow$) η f είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη στο $z_0 = x_0 + iy_0$

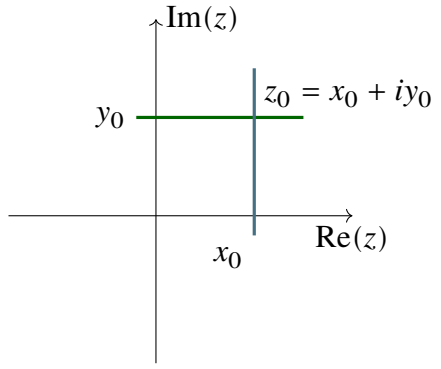
Παρ.

$$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 =$$
$$= x^2 - y^2 + i(2xy), \text{ άρα}$$
$$f = (x^2 - y^2, 2xy) \quad \Bigg| \begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array}$$

Παρατηρήσεις

(α) Έστω f μιγαδικά παραγ. συνάρτηση σε σημείο $z_0 = x_0 + iy_0$. Τότε εξ' ορισμού υπάρχει το όριο

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$



- Έστω $z = x + iy_0 \quad (x \in \mathbb{R})$ είναι τυχαίο σημείο της "οριζόντιας" ευθείας που διέρχεται από το z_0
- Για $x \to x_0$, τότε $z = x + iy_0 \to x_0 + iy_0 = z_0$ (δηλ. $z \to z_0$ όταν $x \to x_0$ πάνω στην οριζόντια ευθεία)

Τότε για $z = x + iy_0$ έχω:

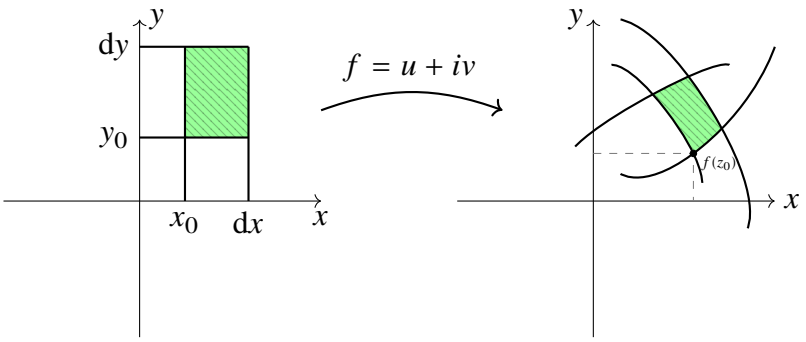
$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x, y_0) + iv(x, y_0) - \big(u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)\big)}{x + iy_0 - (x_0 + iy_0)} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \to x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \\ &\Longrightarrow \boxed{f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)} := \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \end{aligned}$$

Με όμοιο τρόπο, αν εργαστούμε κατά μήκος της "κάθετης" ευθείας που διέρχεται από το z_0, έχουμε:

$$\boxed{f'(z_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)} := -i \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$$

(β) Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\mathrm{d}f(z_0)}{\mathrm{d}z} \\ \Longrightarrow &\boxed{\mathrm{d}f(z_0) = f'(z_0)\,\mathrm{d}z} \end{aligned}$$



$\mathrm{d}z :=$ στοιχειώδης όγκος στο επίπεδο xy

$\mathrm{d}f(z_0) :=$ στοιχειώδες χωρίο στο επίπεδο uv στο οποίο μετασχηματίζεται το $\mathrm{d}z$ μέσω της απεικόνισης f

$$\mathrm{d}f(z_0) = \left|f'(z_0)\right| e^{i \operatorname{Arg} f'(z_0)}\,\mathrm{d}z \quad \big(f'(z_0) \neq 0\big)$$

Για τις παραγώγους στοιχειωδών συναρτήσεων ισχύουν τα συνήθη από την πραγματική ανάλυση.

π.χ Αν $f(z) = e^z$, τότε $(e^z)' = e^z \ \forall z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$
$$= \underbrace{e^x \cos y}_{u(x,y)} + i \underbrace{(e^x \sin y)}_{v(x,y)}$$

Ορίζω $\begin{cases} u(x,y) = \mathrm{Re}(e^z) = e^x \cos y \\ v(x,y) = \mathrm{Im}(e^z) = e^x \sin y \end{cases}$

- u, v καλά ορισμένες $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, και επιπλέον u, v είναι **ΣΥΝΕΧΕΙΣ** $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
- $\begin{matrix} u_x = e^x \cos y & u_y = -e^x \sin y \\ v_x = e^x \sin y & v_y = e^x \cos y \end{matrix}$, έτσι παρατηρώ ότι $\begin{cases} u_x = v_y \\ \text{ΚΑΙ} \quad u_y = -v_x \end{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\xRightarrow{\text{πόρισμα}} f(z) = e^z$ μιγαδικά παραγωγίσιμη $\forall z \in \mathbb{C}$

- Γνωρίζω ότι αν η $f = u + iv$ είναι μιγ. παραγ., τότε $f'(z) = u_x + iv_x$.

  Έτσι στην προκειμένη περίπτωση:

$$f'(z) = (e^z)' = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x e^{iy} = e^z$$

π.χ $(\mathrm{Log} z)' = \frac{1}{z} \ \forall z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{x + iy : x \leq 0 \text{ και } y = 0\}$ $\Big($υπό την προϋπόθεση ότι $\mathrm{Arg}\, z \in (-\pi, \pi]$ $\Big)$

διότι $\mathrm{Log} z = w \overset{\text{ορ.}}{\Longleftrightarrow} z = e^w$, άρα $\forall z \in \mathbb{C}^*$, από το θεώρ. παραγώγισης αντίστροφης συνάρτησης έχουμε: $(\mathrm{Log} z)' = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}$

Με την ίδια λογική (και με χρήση των ιδιοτήτων παραγώγου) αποδεικνύεται ότι:

- $(z^n)' = nz^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $(z^{-n})' = -nz^{-n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$
- $(z^a)' = az^{a-1} \quad \forall a \in \mathbb{Q}$ ή a άρρητος ή a έχει μη μηδενικό φανταστικό μέρος

  $\forall z \in \mathbb{C}^* (\mathbb{C}^*$ όπως στο λογάριθμο πριν $)$
- $(\sin z)' = \cos z \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $(\cos z)' = -\sin z \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $(\sinh z)' = \cosh z \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $(\cosh z)' = \sinh z \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $(a^z)' = a^z \mathrm{Log} a \quad \forall z \in \mathbb{C}$

κλπ.

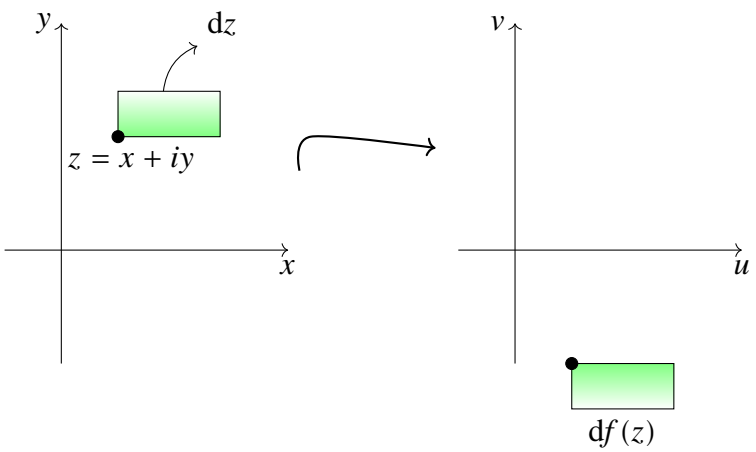
2.3 Ασκήσεις

ΝΔΟ η $f(z) = \bar{z}$ ΔΕΝ είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη **σε κανένα** σημείο του $\mathbb{C}$.

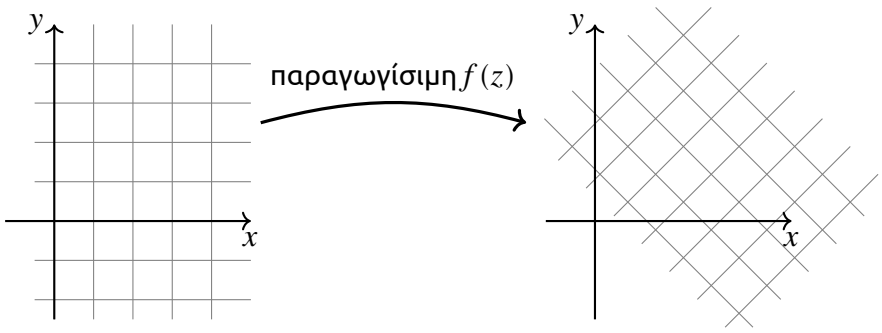
- $\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$, ορίζω $\left| \begin{array}{l} u(x,y) = x \\ v(x,y) = -y \end{array} \right.$
- Προφανώς u και v καλά ορισμένες και συνεχείς $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, αλλά:

$$u_x = 1 \neq -1 = v_y$$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}$, άρα αφού η μία από τις δύο εξισ. C-R δεν ισχύει $\underline{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2}$, η $f(z) = \bar{z}$ **ΔΕΝ** είναι μιγαδικά παραγ. $\forall z \in \mathbb{C}$.

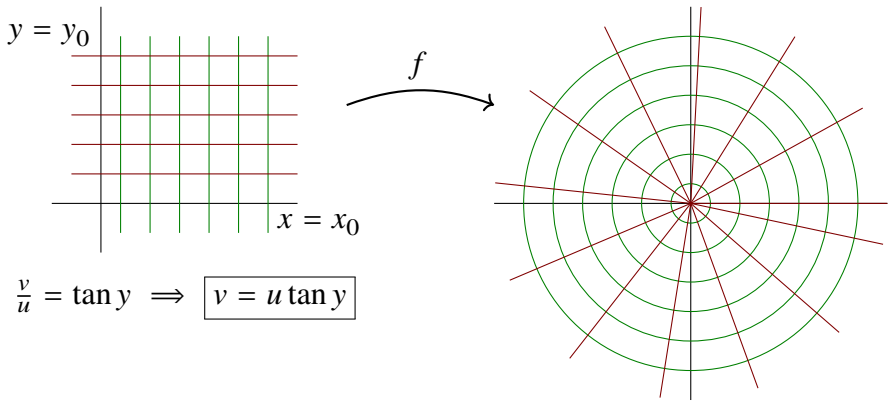


$$\mathrm{d}f(z) = f'(z)\,\mathrm{d}z = \underbrace{|f'(z)|}_{\text{μεγέθυνση}}\,\underbrace{e^{i\,\mathrm{Arg} f'(z)}}_{\text{περιστροφή}}\,\mathrm{d}z$$



$$f(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

$$\left| \begin{array}{l} u = e^x \cos y_0 \\ v = e^x \sin y_0 \end{array} \right.$$



$\frac{v}{u} = \tan y \implies \boxed{v = u \tan y}$

Άσκ. 2 Η συνάρτηση $f(z) = |z|$ **ΔΕΝ** είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη σε **ΚΑΝΕΝΑ** σημείο του $\mathbb{C}$.

Οι εξισώσεις C-R σε πολικές συντ/νες είναι οι εξής:

$$\begin{cases} u_\rho = \frac{1}{\rho} v_\theta & \forall \rho > 0, \theta \in (-\pi, \pi] \\ u_\theta = -\rho v_\rho \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x + iy) \\ &= f\left(|z| e^{i \operatorname{Arg} z}\right) = f\left(\rho e^{i\theta}\right) = u(\rho, \theta) + iv(\rho, \theta) \end{aligned}$$

$f(z) = |z| = \rho$, άρα $\begin{cases} u(\rho, \theta) = \rho \\ v(\rho, \theta) = 0 \end{cases}$

Οι u, v καλά ορισμένες και συνεχείς $\forall \rho > 0, \theta \in (-\pi, \pi]$ αλλά

$$u_\rho = 1 \neq \frac{1}{\rho} \cdot 0 = \frac{1}{\rho} v_\theta \quad \forall \rho > 0, \theta \in (-\pi, \pi]$$

και αφού μία από τις εξισώσεις C-R δεν ισχύει $\forall \rho > 0, \theta \in (-\pi, \pi]$ αναγκαστικά η $f(z) = |z|$ δεν είναι μιγαδικά παραγ. σε κανένα σημείο του $\mathbb{C}$.

π.χ

$$f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad z \neq 0$$

$$\overset{|z|^2 = z\bar{z}}{=} \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}$$

άρα η f είναι παραγωγίσιμη.

Άσκ. 3 Υπολογίστε τα όρια:

(α) $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{e^{z^2} - 1}{z^2}$

(β) $\lim\limits_{z \to 1} \dfrac{z^2 - 1}{\bar{z}^2 - 1}$

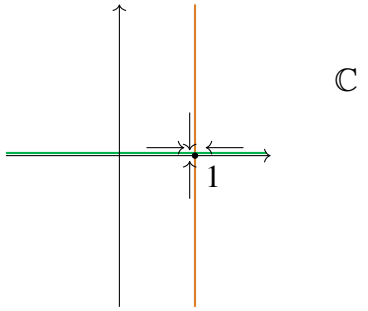
(γ) $\lim\limits_{z \to \infty} e^z$

Στα όρια ισχύει ο De L' Hospital

(α)

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^{z^2}-1}{z^2}\underbrace{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{L'Hospital}}{=}}}_{\text{διότι } e^{z^2}-1 \text{ και } z^2 \text{ μιγ. παραγ.}}\lim_{z\to 0}\frac{2ze^{z^2}-0}{2z}=\lim_{z\to 0}e^{z^2}=e^0=1$$

(β) Θα προσπαθήσω να αποδείξω ότι το όριο δεν υπάρχει, κάτι που φαντάζομαι επειδή μέσα στο όριο υπάρχει ο $\bar{z}$.



- Θεωρώ την "κίνηση κατά μήκος του οριζόντιου άξονα" που διέρχεται από το $z_0=1$.
  Δηλ. θεωρώ σημεία z της μορφής

  $$z=x+i0\quad(x\in\mathbb{R})$$

  Προφανώς για $x\to 1$, έχω: $z\to z_0=1$.
  Τότε $\forall z=x$ έχω:

  $$\lim_{z\to 1}\frac{z^2-1}{\bar{z}^2-1}\underset{\text{του οριζ. άξονα}}{\overset{\text{κατα μήκος}}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-1}=1$$

- Θεωρώ την "κίνηση κατά μήκος του κάθετου άξονα" που διέρχεται από το $z_0=1$, δηλαδή σημεία:

  $$z=1+iy\quad(y\in\mathbb{R})$$

  Προφανώς για $y\to 0$, έχω $z\to z_0=1$, και

  $$\lim_{z\to 1}\frac{z^2-1}{\bar{z}^2-1}\underset{\text{του κατακόρυφου άξονα}}{\overset{\text{κατα μήκος}}{=}}\lim_{y\to 0}\frac{(1+iy)^2-1}{(1-iy)^2-1}=\lim_{y\to 0}\frac{\cancel{1}+2iy-y^2-\cancel{1}}{\cancel{1}-2iy-y^2-\cancel{1}}$$
  $$=\lim_{y\to 0}\frac{2iy-y^2}{-2iy-y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{2i-y}{-2i-y}=\frac{2i}{-2i}=-1$$

Εφόσον $1\neq -1$ το όριο ΔΕΝ υπάρχει.

(γ) $\lim\limits_{x\to\infty}e^x=?$

- Έστω $z=x\quad(x<0)$, για $x\to-\infty$, τότε $z\to\infty$ και $\lim\limits_{z\to\infty}e^z=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$
- Έστω $z=x\quad(x>0)$, για $x\to+\infty$, τότε $z\to\infty$, αλλά: $\lim\limits_{z\to\infty}e^z=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$, συνεπώς το $\lim\limits_{z\to\infty}e^z$ ΔΕΝ υπάρχει.

Άσκ. 4 Αν $f(z) = u + iv$ είναι ακεραία (ολόμορφη στο $\mathbb{C}$) και αν

$$au + bv = c$$

όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$ σταθερές όχι όλες ίσες με μηδέν, ΝΔΟ $f(z) = A,\ A \in \mathbb{C}$ σταθερά.

- Έστω $\underline{c = 0}$, εξ' υποθέσεως $a^2 + b^2 \neq 0$
- Έστω $c \neq 0$, πάλι πρέπει $a^2 + b^2 \neq 0$ (διότι αλλιώς $0 = c$, άτοπο)
- Τελικά $a^2 + b^2 \neq 0$ σε κάθε περίπτωση.

$$\begin{cases} au_x + bv_x = 0 \\ au_y + bv_y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\xRightarrow[u_y = -v_x \text{ αφού } f \text{ ακεραία}]{u_x = v_y} \begin{bmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{vmatrix} = u_x^2 + u_y^2$$

και επειδή $a^2 + b^2 \neq 0$, πρέπει $u_x^2 + u_y^2 = 0$ για να έχει λύση το σύστημα $\Longrightarrow$ $u_x = 0$ και $u_y = 0 \xRightarrow{\text{C-R}}$ $u_x = u_y = v_x = v_y = 0\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Longrightarrow f(z) = A \in \mathbb{C}$ σταθερά.

Άσκ. Βρείτε τα σημεία ολομορφίας των συναρτήσεων:

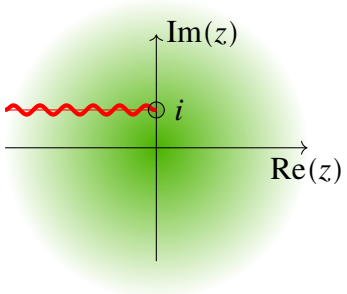
(α) $f(z) = \mathrm{Log}(z - i)$

(β) $g(z) = \tan z$

(α) Έστω ότι $\mathrm{Arg}\, z \in (-\pi, \pi]$. Τότε είναι γνωστό ότι η $\mathrm{Log} z$ είναι μιγαδικά παραγ. στο $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{x + iy \quad x \leq 0 \text{ και } y = 0\}$.

Έτσι η $\mathrm{Log}(z - i)$ είναι μιγ. παραγ. στο σύνολο

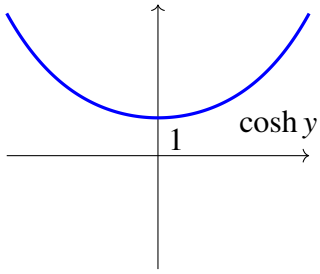
$$\begin{aligned} &\mathbb{C} - \{x + iy : \mathrm{Re}(z - i) \leq 0 \text{ και } \mathrm{Im}(z - i) = 0\} \\ &\overset{z=x+iy}{=} \mathbb{C} - \{x + iy : x \leq 0 \text{ και } y - 1 = 0\} \\ &= \mathbb{C} - \{x + iy : x \leq 0 \text{ και } y = 1\} \end{aligned}$$

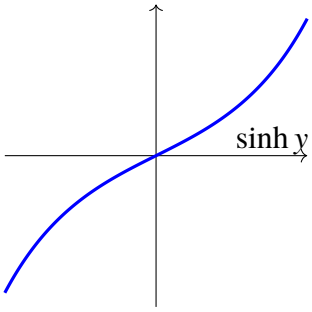


(β) $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$, η g είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ εκτός των σημείων που μηδενίζουν τον παρονομαστή.

- $\cos z = 0 \iff \cos(x+iy) = 0 \iff \cos x\cos(iy) - \sin x\sin(iy) = 0 \overset{\text{op. sin \& cos}}{\iff}$
$\cos x \cdot \frac{e^{-y}+e^{y}}{2} - \sin x \cdot \frac{e^{-y}-e^{y}}{2i} = 0 \iff \cos x \cdot \cosh y - i\sin x \cdot \sinh y = 0 \iff$

$$\left|\begin{array}{l}\cos x\cdot\cosh y = 0\\ \text{και}\\ \sin x\cdot\sinh y = 0\end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \text{και}\\ \sin x = 0\\ \text{(Αδύνατο)}\end{array}\right. \text{ ή } \left|\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \text{και}\\ \sinh y = 0\end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l}x = k\pi + \frac{\pi}{2}\\ y = 0\end{array}\right. , k \in \mathbb{Z}.$$





Τελικά $\cos z \iff \boxed{z = k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}}$ και έτσι g είναι ολόμορφη στο

$$\mathbb{C} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Άσκ. Έστω $f(x+iy) = (x^2+2y) + i(x^2+y^2)$

(i) Να γραφεί η f συναρτήσει του $z = x+iy$

(ii) Να βρείτε όλα τα σημεία, όπου η f είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη

(iii) Να βρείτε όλα τα σημεία στα οποία η f είναι ολόμορφη

(i) $x = \frac{z+\bar{z}}{2},\ y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$
$(z = x+iy)$

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) + i\left(\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2\right)\\ &= \frac{z^2+2z\bar{z}+\bar{z}^2}{4} - i\,(z-\bar{z}) + i\left(\frac{z^2+2z\bar{z}+\bar{z}^2}{4} - \frac{z^2-2z\bar{z}+z^2}{4}\right)\\ &= \frac{z^2+2|z|^2+\bar{z}^2}{4} - i\left(z-\bar{z}-|z|^2\right)\end{aligned}$$

(ii) Προφανώς $\left|\begin{array}{l}\mathrm{Re}(f) := u(x,y) = x^2+2y\\ \mathrm{Im}(f) := v(x,y) = x^2+y^2\end{array}\right.$

- Οι u και v είναι συνεχείς (ως πολυωνυμικές) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
- $\begin{cases} u_x = v_y \\ \text{ΚΑΙ} \\ u_y = -v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2y \\ \text{ΚΑΙ} \\ 2 = -2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ \text{ΚΑΙ} \\ x = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \\ \text{ΚΑΙ} \\ y = -1 \end{cases}$

Άρα η f είναι μιγαδ. παραγ. **μόνον** στο $\boxed{z = -1-i}$, και μάλιστα, εφ' όσον $f(z) = f'(x+iy) = u_x + iv_x$:

$$f'(-1-i) = 2(-1) + i2(-1) = \underline{-2-i2}$$

(iii) ΔΕΝ υπάρχουν σημεία όπου η f είναι ολόμορφη.

Κεφάλαιο 3 Μιγαδική ολοκλήρωση

Εισαγωγή

Ορισμός

Καλούμε **καμπύλη** στο μιγαδικό επίπεδο κάθε συνεχή συνάρτηση

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C} : \gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

όπου $x, y : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις.

Έτσι: $\gamma(t)$ καλείται

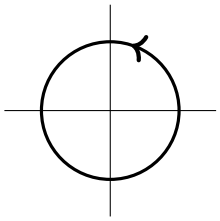
ΑΠΛΗ αν είναι 1-1 (δεν αυτοτέμνεται)
ΚΛΕΙΣΤΗ αν έχει ίδια αρχή και πέρας
ΛΕΙΑ αν είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ με συνεχή παράγωγο

$$\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$$

και μη μηδενική παράγωγο $\forall t$

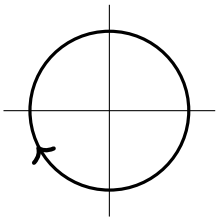
- Κάθε τέτοια καμπύλη έχει ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟ (φορά διαγραφής) προς την κατεύθυνση αύξησης του t

π.χ. $\gamma(t) = e^{it},\ t \in (-\pi, \pi]$



μοναδιαίος κύκλος
κέντρου $(0, 0)$

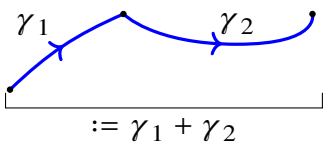
$\gamma(t) = e^{-it},\ t \in (-\pi, \pi]$



- Αν γ κλειστή λέω ότι είναι θετικά προσανατολισμένη αν η φορά διαγραφής είναι η αντιωρολογιακή

- $-\gamma$: ίδιο ίχνος με τη γ, αλλά αντίθετη φορά διαγραφής

- $\gamma_1 + \gamma_2$:



Ορισμός

Έστω $f = f(z)$ ΣΥΝΕΧΗΣ μιγαδική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής και $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ λεία καμπύλη. Καλώ επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f ΠΑΝΩ στη γ να είναι ο ΜΙΓΑΔΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f\left(\gamma(t)\right) \underbrace{\gamma'(t)\,\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}\gamma(t)}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\gamma(t) &= \mathrm{d}\left(x(t) + iy(t)\right) = \\ &= \mathrm{d}x(t) + i\,\mathrm{d}y(t) = \left(x'(t) + iy'(t)\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{d}\gamma(t) = \gamma'(t)\,\mathrm{d}t}$$

Οι κλασικές ιδιότητες των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων έργου ισχύουν στους μιγαδικούς. Ενδεικτικά:

- $\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$
- $\int_\gamma (af + bg)(z)\,\mathrm{d}z = a\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + b\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z \;\forall a,b \in \mathbb{C}$
- $\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$
- $\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_\gamma |f(z)|\,\mathrm{d}z \le M \cdot$ (μήκος της γ) όπου M μέγιστο της $|f|$ επί της γ
- $\int_\gamma |\mathrm{d}z| = \int_a^b \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,\mathrm{d}t :=$ μήκος της καμπ. γ

Πρόταση: Έστω $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ συνεχής επί καμπύλης λείας $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$.
Τότε:

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \underbrace{\left(\int_\gamma u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y\right)}_{\substack{\text{επικαμπύλιο ολοκλ.}\\ \text{διαν. πεδίου στον } \mathbb{R}^2}} + i\underbrace{\left(\int_\gamma u\,\mathrm{d}y + v\,\mathrm{d}x\right)}_{\substack{\text{επικαμπύλιο ολοκλ.}\\ \text{διαν. πεδίου στον } \mathbb{R}^2}}$$

Απόδ.

$$\begin{aligned}&\int_\gamma (u + iv)\,\mathrm{d}(x + iy) \\ &= \int_a^b \left[u\left(x(t),y(t)\right) + iv\left(x(t),y(t)\right)\right]\left(x'(t) + iy'(t)\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \left(u\left(x(t),y(t)\right)x'(t) - v\left(x(t),y(t)\right)y'(t)\right)\mathrm{d}t + i\int_a^b \left(u\left(x(t),y(t)\right)y'(t) + v\left(x(t),y(t)\right)x'(t)\right)\mathrm{d}t \\ &\overset{\text{ορ.}}{=} \left(\int_\gamma u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y\right) + i\left(\int_\gamma u\,\mathrm{d}y + v\,\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

Ορίζω $\bar{f}(z) = u(x,y) - iv(x,y)$
Τότε

$$\int_\gamma u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y \overset{\text{Λογ. II}}{:=} \text{έργο του πεδίου } \bar{f} \text{ επί της καμπύλης } \gamma$$

$$\int_\gamma u\,\mathrm{d}y + v\,\mathrm{d}x \overset{\text{Λογ. II}}{:=} \underline{\text{ροή}} \text{ του } \bar{f} \text{ διά μέσου της } \gamma$$

3.1 Αντιπαράγωγος και ανεξαρτησία δρόμου

Ορισμός

Έστω $f = f(z)$ είναι μια συνεχής μιγαδική συνάρτηση (μιγαδικής μεταβλητής) σε τόπο GCC (τόπος := ανοικτό και συνεκτικό σύνολο). Αν υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση $F = F(z)$, έτσι ώστε:

$$F'(z) = f(z)\ \forall z \in \mathrm{G},$$ τότε η F καλείται αντιπαράγωγος της f.

Θεώρημα

Έστω $f = f(z)$ είναι συνεχής μιγαδική συνάρτηση σε τόπο G. Οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

- Η f έχει ΜΟΝΑΔΙΚΗ αντιπαράγωγο F (με προσέγγιση σταθεράς)
- $\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, για ΚΑΘΕ κλειστή λεία καμπύλη εντός του G
- $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ είναι ανεξάρτητο του δρόμου (δηλαδή εξαρτάται μόνον από το αρχικό και τελικό σημείο της γ και όχι από τον τύπο της γ)

Οι συνήθεις αντιπαράγωγοι εξακολουθούν να ισχύουν, π.χ.:

$$\int z^n\,\mathrm{d}z = \frac{z^{n+1}}{n+1} + c, \forall z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$$
$$\int \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \mathrm{Log}z + c, \forall z \in \mathbb{C}^*$$
$$\int z^{-n}\,\mathrm{d}z = \frac{z^{-n+1}}{-n+1} + c, \forall n \in \mathbb{N} - \{1\}, c \in \mathbb{C} \text{ σταθερά}$$
$$\int \sin z\,\mathrm{d}z = -\cos z + c$$
$$\int \cos z\,\mathrm{d}z = \sin z + c$$

κλπ.

π.χ. Υπολογίστε το $\int_\gamma ze^z\,\mathrm{d}z$ επί της καμπύλης γ με τύπο $\gamma = \gamma(t)$ και αρχή $\gamma(a) = 1 + i$ και πέρας $\gamma(b) = 1 - i$

$$\int ze^z\,\mathrm{d}z = ze^z - \int e^z\,\mathrm{d}z = \underline{ze^z - e^z}$$

οπότε:

$$\int_\gamma ze^z\,\mathrm{d}z = [ze^z - e^z]_{z_0=1+i}^{z_1=1-i}$$
$$= e^{1-i}(1+i-1) - e^{1+i}(1+i-1)$$

3.2 Θεώρημα Cauchy

Θεώρημα: Cauchy

Έστω $f = f(z)$ είναι **ολόμορφη** συνάρτηση **πάνω** και στο **εσωτερικό απλής**, κλειστής και λείας καμπύλης γ.
Τότε:

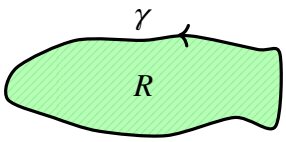
$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Απόδ. Έστω $f = u + iv$, όπου $u = u(x,y)$ και $v = v(x,y)$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους πάνω και στο εσωτερικό της γ. Τότε:

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \left(\oint_\gamma u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y\right) + i\left(\oint u\,\mathrm{d}y + v\,\mathrm{d}x\right)$$
$$\overset{\text{Θεώρ. Green}}{=} \iint_R (-v_x - u_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + i\iint_R (u_x - v_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

και επειδή η f ολόμορφη ικανοποιούνται οι συνθήκες Cauchy-Riemann $\forall (x,y)$ στο εσωτερικό της γ, δηλαδή το R, άρα:

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \overset{u_x = v_y}{\underset{u_y = v_x}{=}} \iint_R 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + i\iint_\gamma 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

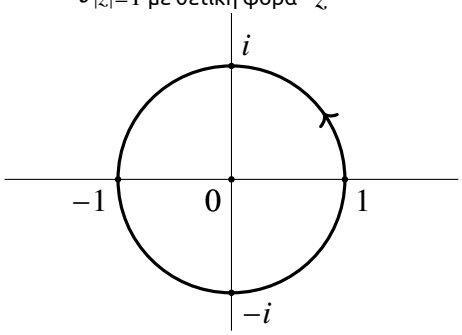


$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \underbrace{a}_{\text{έργο του πεδίου } f \text{ κατά μήκος } \gamma} + i\,\overbrace{b}^{\text{ροή του πεδίου } \vec{f} \text{ διά μέσου της } \gamma}$$

($\vec{f} \to$ ασυμπίεστο, αστρόβιλο ικανοποιούν εξίσωση Laplace $u_{xx} + v_{yy} = 0$)

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Αν υπάρχει έστω και ένα σημείο όπου η f δεν είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη στο εσωτερικό της γ, τότε το **θεώρ. Cauchy δεν ισχύει εν γένει**.

π.χ $\displaystyle\oint_{|z|=1 \text{ με θετική φορά}} \frac{\mathrm{d}z}{z}$



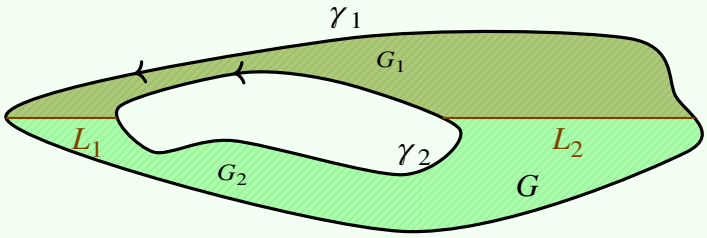
$$\oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z} \underset{t\in[0,2\pi)}{\overset{\gamma(t)=e^{it}}{=}}$$

$$\overset{\text{ορ.}}{=} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\left(e^{it}\right)}{e^{it}} = \int_0^{2\pi} \frac{(e^{it})^2}{e^{it}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} = \underline{2\pi i}$$

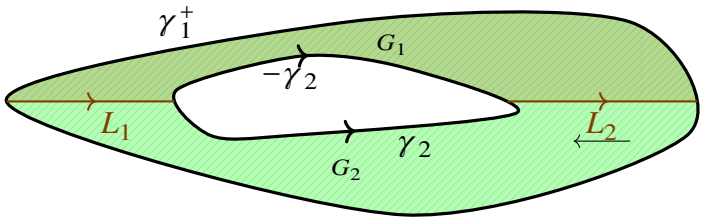
Θεώρημα: Παραμόρφωση δρόμων

Έστω $f = f(z)$ είναι ολόμορφη σε τόπο G με σύνορο $\partial G = \gamma_1 \cup \gamma_2$ όπου γ_1, γ_2 απλές λειστές καμπύλες, λείες, με κοινό προσανατολισμό π.χ. όπως στο σχήμα.



Τότε $\oint_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$

Απόδ. Φέρνω δύο ευθ. τμήματα L_1 και L_2 που διαμερίζουν το G σε δύο χωρία έστω G_1, G_2. Τότε το θ. Cauchy ισχύει και στο G_1 και στο G_2.



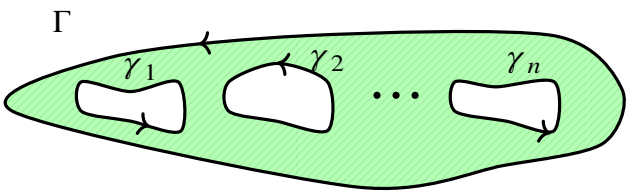
- $\int_{\gamma_1^+ + L_1 + \gamma_2^+ + L_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ (θ. Cauchy για το χωρίο G_1)
- $\int_{\gamma_2^- - L_1 - \gamma_2^- - L_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ (θ. Cauchy για το χωρίο G_2)

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \left(\int_{\gamma_1^+} + \int_{L_1} + \int_{\gamma_2^+} + \int_{L_2}\right) f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \\ \left(\int_{\gamma_1^-} - \int_{L_1} - \int_{\gamma_2^-} - \int_{L_2}\right) f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \oint_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z - \oint_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Πόρισμα (Γενικευμένο θεώρ. Cauchy) Έστω $f = f(z)$ ολόμορφη σε τόπο G με σύνορο $\partial G = \Gamma \cup (\gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_2)$, όπου:

- $\Gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ απλές, κλειστές, λείες και ΘΕΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΕΣ καμπύλες
- Οι $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ βρίσκονται εντός της Γ και

- Κάθε καμπύλη $\gamma_j \quad j = 1, \dots, n$ βρίσκεται εκτός των υπόλοιπων $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{i-1}, \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_n$



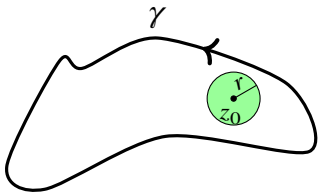
Τότε: $\oint_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{k} \oint_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z$

Θεώρημα: Ολοκληρωτικός τύπος Cauchy

Έστω $f = f(z)$ είναι ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό απλής, κλειστής, τμημ. λείας και ΘΕΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗΣ καμπύλης γ.
Τότε ΓΙΑ ΚΑΘΕ σημείο z_0 ΣΤΟ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ της γ ισχύει:

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z}$$

Απόδειξη



Έστω $|z - z_0| = r$ κύκλος ακτίνας r κατάλληλης ώστε ο δίσκος $|z - z_0| \le r$ να βρίσκεται εξ' ολοκλήρου στο εσωτερικό της γ.

Τότε από το θεώρημα παραμόρφ. δρόμων, εφ' όσον $\frac{f(z)}{z-z_0}$ ολόμορφη στο γραμμοσκιασμένο χωρίο, έχουμε:

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = \underbrace{\oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z}_{I_2} + \underbrace{\oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z_0)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z}_{I_1}$$

Για το I_2 έχω:

$$\begin{aligned} I_2 &= \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z_0)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z \underset{\theta\in[0,2\pi]}{\overset{z=z_0+re^{i\theta}}{=}} f(z_0) \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{i\theta}} rie^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi i f(z_0) \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{lcl} l = l' & \Longleftrightarrow & |l - l'| < \epsilon \ \forall \epsilon > 0 \\ \quad " & \Longrightarrow & " \ \text{προφ. ισχύει} \\ \quad " & \Longleftarrow & " \ \text{Έστω } l \neq l' \implies |l - l'| \ge \epsilon_0 > 0 \text{ άτοπο} \implies l = l' \end{array} \right)$$

Έτσι:

$$\boxed{\oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z - 2\pi i f(z_0) = I_1}$$

$$|I_1| \leq \oint_{|z-z_0|=r} \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}\,\mathrm{d}z \leq M \cdot \oint_{|z-z_0|=r} \frac{1}{|z-z_0|}\,\mathrm{d}z,$$

όπου $M = \max\left\{|f(z)-f(z_0)| \;\; \forall z : |z-z_0| = 1\right\}$

$$\begin{aligned} &= M \oint_{|z-z_0|=r} \frac{1}{r}|\,\mathrm{d}z| \\ &= \frac{M}{r} \underbrace{\oint_{|z-z_0|=r} |\,\mathrm{d}z|}_{\text{μήκος καμπύλης}} = \frac{2\pi M r}{r} = \underline{2\pi M} \end{aligned}$$

Αλλά f ολόμορφη στο z_0, άρα f συνεχής στο z_0.
Εξ' ορισμού λοιπόν: $\forall \epsilon > 0\, \exists r_1 > r > 0 : \;\; \forall z : 0 < |z-z_0| < r < r_1 \implies |f(z)-f(z_0)| < \epsilon$
Έτσι $\forall \epsilon > 0$ μπορώ να βρω ακτίνα $r : |f(z)-f(z_0)| \;\; \forall z : |z-z_0| = r$, δηλ. $M \leq \epsilon$ και τελικά $|I_1| \leq 2\pi M \leq 2\pi\epsilon \;\; \forall \epsilon > 0 \implies I_1 = 0$

Θεώρημα: Ολοκληρ. τύπος Cauchy για παραγώγους

Έστω f είναι ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό απλής, κλειστής, λείας και θετικά προσανατολισμένης καμπύλης γ.
Αν z_0 σημείο στο ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ της γ, τότε η f ΕΧΕΙ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ <u>ΚΑΘΕ ΤΑΞΗΣ</u> στο σημείο z_0 και μάλιστα:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z$$

Ο Ατρέας θα δίνει τύπους σε τυπολόγιο: `http://users.auth.gr/natreas/Efarmosmena/ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ.pdf`

3.3 Εφαρμογές

(1) **Θεώρ. μέσης τιμής Gauss**

Αν f ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό θετικά προσανατολισμένου κύκλου $|z-z_0| = R$, τότε:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + Re^{i\theta}\right)\mathrm{d}\theta$$

Απόδειξη Εφαρμόζω τον ολοκλ. τύπο του Cauchy με τα δεδομένα μου και έχω:

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z \\ &\underset{\text{ορισμός}}{\overset{z=z_0+Re^{i\theta}}{=}} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(z_0+Re^{i\theta}\right)}{Re^{i\theta}}\,\mathrm{d}\left(z_0+Re^{i\theta}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(z_0+Re^{i\theta}\right)}{\cancel{Re^{i\theta}}} i\cancel{Re^{i\theta}}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \text{ζητούμενο} \end{aligned}$$

(2) **Ανισότητα Cauchy** Έστω f ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό θετικά προσανατολισμένου κύκλου $|z - z_0| = R$ και $M_R = \max\{|f(z)|,\ \forall z : |z - z_0| = R\}$

Τότε:

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n! M_R}{R^n},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Απόδ. Εφαρμόζουμε τον ολοκλ. τύπο Cauchy για παραγώγους προσαρμοσμένο στα δεδομένα:

$$\begin{aligned}
|f^{(n)}(z_0)| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, \mathrm{d}z \right| \\
&\leq \frac{n!}{2\pi} \oint_{|z-z_0|=R} \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^{n+1}} |\,\mathrm{d}z| \\
&\leq \frac{n!}{2\pi} M_R \oint_{|z-z_0|=R} \frac{1}{|z - z_0|^{n+1}} |\,\mathrm{d}z| \\
&= \frac{n!}{2\pi} M_R \oint_{|z-z_0|=R} \frac{1}{R^{n+1}} |\,\mathrm{d}z| \\
&= \frac{n!}{2\pi} M_R \frac{1}{R^{n+1}} \underbrace{\oint_{|z-z_0|=R} |\,\mathrm{d}z|}_{\text{μήκος κύκλου } z-z_0=R} \\
&= \frac{n!}{2\pi} M_R \frac{1}{R^{n+1}} \cdot 2\pi R = \frac{n! M_R}{R^n}
\end{aligned}$$

(3) **Θεώρ. Liouville**

Κάθε **ακεραία** συνάρτηση (δηλ. ολόμορφη στο $\mathbb{C}$) και φραγμένη $\boxed{\text{στο } \mathbb{C}}$ είναι η σταθερή συνάρτηση.

Απόδ. Έστω $z \in \mathbb{C}$ τυχαίο. Χρησιμοποιώ ανισότητα Cauchy για $n = 1$:

$$|f'(z)| \leq \frac{1!\, M_R}{R}, \quad M_R = \max\{|f(z)| : |z - z_0| = R\}$$

Αφού f εξ' υποθέσεως είναι φραγμένη, άρα $\exists \underline{M > 0} : |f(z)| \leq M \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Δηλ. $|f'(z)| \leq \frac{M_R}{R} \leq \frac{M}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{0}$

Τότε $|f'(z)| = 0 \iff f'(z) = 0 \forall z \in \iff f(z) = c \in \mathbb{C}$

(4) **Αρχή μεγίστου/ελαχίστου**

Έστω f ολόμορφη σε ανοικτό και συνεκτικό σύνολο G και μη σταθερή στο G. Τότε η $|f|$ **ΔΕΝ έχει μέγιστη τιμή** στο G.

Αν μάλιστα $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in G$, τότε η $|f|$ **ΔΕΝ έχει ελάχιστη τιμή στο** G.

Ειδικά αν G είναι και **ΦΡΑΓΜΕΝΟ** και η f είναι συνεχής στο σύνορο του G (το οποίο είναι απλή, λεία καμπύλη), τότε η $|f|$ **παίρνει ΜΕΓΙΣΤΗ ΤΙΜΗ ΠΑΝΩ στο σύνορο του** G. Ομοίως αν $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in G$, τότε η $|f|$ παίρνει ελάχιστη τιμή ΠΑΝΩ στο σύνορο του G.

Άσκ. Υπολογίστε το $\int_\gamma (i\bar{z} - z)\, \mathrm{d}z$
όπου γ είναι η παραβολή $y = 2t^2 + 1$ με αρχή το σημείο $(1, 3)$ και πέρας το σημείο $(2, 9)$.

Γενικά, μπορώ να κινηθώ μέσω ορισμού, αντιπαραγώγου ή θεωρημάτων. Η $\bar{z}$ δεν έχει παράγωγο, άρα δεν έχει αντιπαράγωγο (διαφορετικά από προηγούμενη εφαρμογή θα είχε άπειρες παραγώγους).

Έχουμε:

$$\int_\gamma (i\bar{z} - z)\,\mathrm{d}z = i\int_\gamma \bar{z}\,\mathrm{d}z - \int_\gamma z\,\mathrm{d}z = I_1 + I_2$$

- όσον αφορά το I_2, εφ' όσον η $f(z) = z$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ ως πολυώνυμο, έχει μοναδική αντιπαράγωγο (με προσέγγιση σταθεράς), άρα:

$$\int_\gamma z\,\mathrm{d}z = \left.\frac{z^2}{2}\right|_{z_0=1+3i}^{z_1=2+9i}$$

(αντιπαράγωγος $\xRightarrow{\text{θεωρία}}$ ανεξαρτησία δρόμου)

$$\begin{aligned}
&= \frac{(2+9i)^2}{2} - \frac{(1+3i)^2}{2} \\
&= \frac{69}{2} - 15i \\
&= B
\end{aligned}$$

- Για το I_1:

$$\begin{aligned}
I_1 &= i\int_\gamma \bar{z}\,\mathrm{d}z \underset{\text{διότι η } \bar{z} \text{ ΔΕΝ είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο}}{\overset{\text{ορισμός}}{=}} \\
&\underset{t+i(2t^2+1)=\gamma(t)}{\overset{(t,2t^2+1)}{=}} i\int_1^2 \overline{\gamma(t)}\,\mathrm{d}\left(\gamma(t)\right) \\
&= i\int_1^2 \left[t - i\left(2t^2+1\right)\right] \underbrace{\left[1+4ti\right]\mathrm{d}t}_{\gamma'(t)\,\mathrm{d}t := \mathrm{d}\gamma(t)} \\
&= i\int_1^2 \left[t + 4t\left(2t^2+1\right)\right] + i\left[1 + 2t^2 + 4t^2\right]\mathrm{d}t \\
&= i\int_1^2 \left(5t + 8t^3\right) + i\left(6t^2+1\right)\mathrm{d}t \\
&= i\left[\frac{5t^2}{2} + 2t^4\right]_1^2 - \left(2t^3+t\right)_1^2 \\
&= A + B
\end{aligned}$$

Τελικά

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2$$

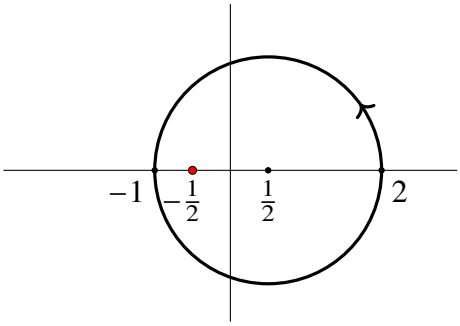
Άσκ. Υπολογίστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα

(α) $\oint_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2}} \frac{z\cos z}{2z+1}\,\mathrm{d}z$

(β) $\oint_{|z|=3} \frac{z^3+2}{(z-2)^3}\,\mathrm{d}z$

(γ) $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-1}\,\mathrm{d}z$

Όλες οι καμπύλες θεωρούνται προσανατολισμένες με τη θετική φορά.

(α) 

Θα χρησιμοποιήσω ολοκλ. τύπο Cauchy.

Έστω $f(z) = z\cos z$, ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ άρα και πάνω και στο εσωτερικό του κύκλου

$$\left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2}$$

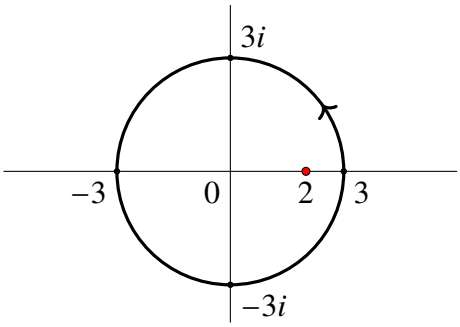
Προφανώς:

$$\oint_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2}} \frac{z\cos z}{2z+1}\,\mathrm{d}z$$
$$= \frac{1}{2}\oint_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2}} \frac{z\cos z}{z-\left(-\frac{1}{2}\right)}\,\mathrm{d}z,$$

όπου $z_0 = -\frac{1}{2} \in$ εσωτερικό του κύκλου $\left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2}$, ο οποίος είναι θετικά προσανατολισμένος. Τότε ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες ώστε να έχω

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2}} \frac{z\cos z}{z-\left(-\frac{1}{z}\right)}\,\mathrm{d}z$$
$$= \left|z\cos z\right|_{z_0=-\frac{1}{2}} \implies \oint_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2}} \frac{z\cos z}{z+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z = 2\pi\left(-\frac{i}{2}\right)\cos\left(-\frac{1}{2}\right)$$

Τελικά: $\boxed{\oint_\gamma \frac{z\cos z}{2z+1}\,\mathrm{d}z = \frac{-\pi i}{2}\cos\left(-\frac{1}{2}\right)}$

(β) 

Θα χρησιμοποιήσω τύπο Cauchy για παραγώγους με $\mathrm{n} = 2$.

Έστω $g(z) = z^3 + 2$, προφανώς ακεραία (ολόμορφη σε όλο το $\mathbb{C}$), άρα ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό του κύκλου μας.

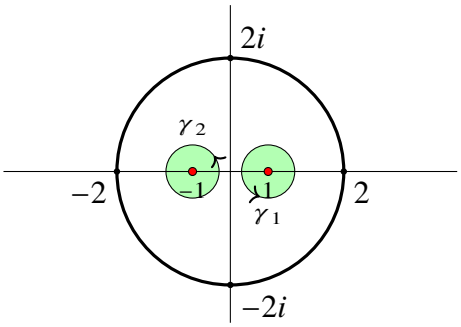
Επίσης, $z_0 = 2 \in$ εσωτερικό του θετικά προσανατολισμένου κύκλου μας, άρα από τύπο Cauchy για παραγώγους έχουμε:

$$g''(2) = \frac{2!}{2\pi i}\oint_{|z|=3} \frac{g(z)}{(z-2)^3}\,\mathrm{d}z \qquad \left(g(z) = z^3 + 2\right)$$
$$\implies \oint_{|z|=3} \frac{z^3+2}{(z-2)^3}\,\mathrm{d}z = \pi i \cdot g''(2)$$

$$
\begin{aligned}
g'(z) &= 3z^2 \\
g''(z) &= 6z \\
g''(2) &= 12
\end{aligned}
$$

Τελικά $\oint_{|z|=3} \frac{z^3+2}{(z-2)^3}\,\mathrm{d}z = 12\pi i$

(γ)

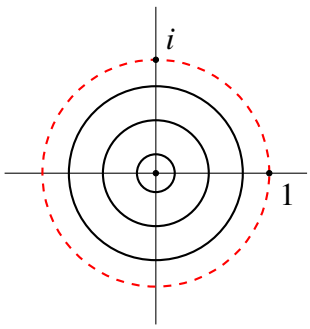


Χρησιμοποιώ κατ' αρχήν γενικευμένο θεώρημα Cauchy, και έχω:

$$
\begin{aligned}
I_{\text{ζητούμενο}} &= \oint_{\gamma_1} \frac{e^z\,\mathrm{d}z}{(z-1)(z+1)} + \oint_{\gamma_2} \frac{e^z\,\mathrm{d}z}{(z-1)(z+1)} \\
&= \oint_{\gamma_1} \frac{e^z/(z+1)}{z-1}\,\mathrm{d}z + \oint_{\gamma_2} \frac{e^z/(z-1)}{z+1}\,\mathrm{d}z \\
&\overset{\text{τύπος}}{\underset{\text{Cauchy}}{=}} 2\pi i \frac{e^z}{z+1}\bigg|_{z=1} + 2\pi i \frac{e^z}{z-1}\bigg|_{z=-1} \\
&= \pi i e - \pi i e^{-1}
\end{aligned}
$$

(διότι οι αριθμητές $\left| \begin{array}{l} a(z) = \frac{e^z}{z+1} \\ b(z) = \frac{e^z}{z-1} \end{array} \right.$ είναι ολόμορφες συναρτήσεις πάνω και στο εσωτερικό των καμπύλων γ_1 και γ_2 αντιστοίχως και $z_0 = 1 \in$ εσωτερικό της γ_1 ενώ $z_1 = -1 \in$ εσωτερικό γ_2)

Θέμα: Υπολογίστε το $\oint_{|z|=R} \frac{1}{(z-i)^2}\,\mathrm{d}z$ για όλες τις τιμές του R, όπου $R > 0$ και $R \neq 1$



(α) $\underline{R < 1}$

Τότε $I = 0$ από θεώρ Cauchy αφού ανωμαλία $z_0 = i$ εκτός κύκλου $|z| = R$

(β) $\underline{R > 1}$

Τότε $z_0 = i \in$ εσωτερικό κύκλου $|z| = R$ οπότε χρησιμοποιώ τύπο Cauchy για παραγώγους και βρίσκω

$$I = 0.$$

Άσκ. Έστω f ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό κύκλου $|z| = R$, με $f(z) \neq 0 \ \forall z$ στο εσωτερικό του κύκλου και $f(z) = c$ για κάθε z πάνω στον κύκλο $|z| = R$.

ΝΔΟ $|f(z)| = A \geq 0 \ \forall z$ στο εσωτερικό του κύκλου.

Θα χρησιμοποιήσω αρχή μεγίστου/ελαχίστου, η οποία λέει ότι η $|f(z)|$ παίρνει τόσο τη μέγιστη, όσο και την ελάχιστη τιμή της ΠΑΝΩ στον κύκλο $|z| = R$.

Εφ' όσον όμως $f(z) = c \ \forall z : |z| = R$ τότε $|f(z)| = |c| =$ σταθερό $\forall z$ πάνω στον κύκλο, όπου όμως η $|f|$ παίρνει και μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Άρα η $\max |f| = \min |f| \ \forall z : |z| = R$, συνεπώς $|f| =$ σταθερά $\forall z$ στο εσωτερικό του κύκλου.

Άσκ. Έστω f ακεραία και $|f(z)| \leq A|z| \forall z \in \mathbb{C}$. ΝΔΟ $f(z) = cz$, όπου $c \in \mathbb{C}$ σταθερά.

Θα χρησιμοποιήσω ανισότητα Cauchy για $n = 2$, προσπαθώντας να δείξω ότι:

$$|f''(z)| = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

τότε $f'(z) = c \implies f(z) = cz + d \quad c, d \in \mathbb{C}$. Από υπόθεση, για $z = 0$ έχω $|f(0)| \leq A \cdot 0 \implies f(0) = 0$ άρα $d = 0$.

Ανισότητα Cauchy

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n! \cdot M_R}{R^n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

όπου $M_R = \max \{|f(z)| : |z - z_0| = R\}$

Έτσι για $n = 2$ έχω για $z_0 \in \mathbb{C}$

$$f''(z_0) \leq \frac{2! \cdot M_R}{R^2} = \frac{2M_R}{R^2}$$

Για $|z - z_0| = R$ δηλ. για $z = z_0 + Re^{i\theta}$ έχω $|f(z)| \overset{\text{εξ' υποθέσεως}}{\leq} A|z| = A\left|z_0 + Re^{i\theta}\right| \leq A|z_0| + AR$

Τότε:

$$|f''(z_0)| \leq \frac{2\left(|z_0 + R|\right)}{R^2} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$$

άρα $|f''(z_0)| = 0 \ \forall z_0 \in \mathbb{C}$, άρα $f''(z_0) = 0 \ \forall z_0 \in \mathbb{C}$.

Κεφάλαιο 4 Ολοκληρωτικά υπόλοιπα και εφαρμογές

Ορισμός

Έστω $f = f(z)$ μιγαδική συνάρτηση. Ένα σημείο $z_0 \in \mathbb{C}$ καλείται **ΑΝΩΜΑΛΟ σημείο** της f, εάν είτε η f ΔΕΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ στο z_0, είτε ορίζεται στο z_0 αλλά δεν έχει "καλή συμπεριφορά" στο z_0, π.χ. δεν είναι ολόμορφη στο z_0

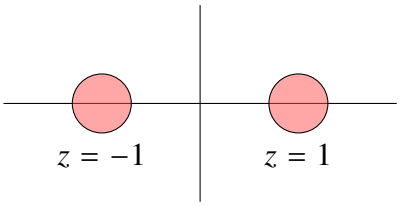
- Αν z_0 είναι ανώμαλο σημείο της f, τότε το z_0 καλείται **ΑΠΟΜΟΝΩΜΕΝΟ ανώμαλο σημείο** της f, εάν η f είναι ολόμορφη στον Ανοικτό δακτύλιο

$$0 < |z - z_0| < R$$

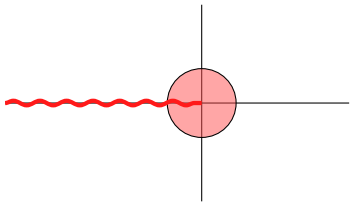
για κάποιο $R > 0$, διαφορετικά το z_0 καλείται ΜΗ απομονωμένο ανώμαλο σημείο.

π.χ.

- $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z^2-1}$ $\quad (z_0 = 1, z_0 = -1)$ απομονωμένα ανώμαλα σημεία της f



- $g(z) = \mathrm{Log} z$ ($z_0 = 0$ μη απομονωμένη ανωμαλία. Επίσης τα σημεία του αρνητικού ημιάξονα των πραγματικών είναι μη απομονωμένα ανώμαλα σημεία του λογάριθμου)



- $h(z) = \cos\left(\dfrac{1}{z}\right)$ ($z_0 = 0$ το μοναδικό μεμονωμένο σημείο)

Έστω z_0 είναι **ΑΠΟΜΟΝΩΜΕΝΟ** ανώμαλο σημείο μιας συνάρτησης f. Τότε υπάρχει κάποιος δακτύλιος

$$0 < |z - z_0| < R$$

όπου η f είναι ολόμορφη και η f αναπτύσσεται σε σειρά Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^k, \quad \forall 0 < |z - z_0| < R$$

Δηλ.

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots + a_n(z - z_0)^k + \ldots$$

Θα λέμε ότι:

- Το z_0 είναι **ΑΠΑΛΕΙΨΙΜΗ ανωμαλία**, εάν:

$$a_n = 0 \quad \forall n < 0$$

όπου $a_n \in \mathbb{C}$ οι συντελεστές του αναπτύγματος Laurent της f "γύρω" από το z_0.

π.χ. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$ $\quad z_0 = 0$ (ανώμαλο σημείο)

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots$$
$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \ldots$$
$$\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \frac{z^5}{7!} + \ldots$$ δεν είναι απαλείψιμη ανωμαλία στο 0

- Το z_0 καλείται **ΠΟΛΟΣ** της f τάξης $k \in \mathbb{N}$, εάν

$$\boxed{a_n = 0 \quad \forall n < -k}$$

Τότε το ανάπτυγμα Laurent της f γίνεται:

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \cdots + a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots$$

Έτσι έχουμε:

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k} \underbrace{\left(a_{-k} + a_{-k+1}(z-z_0) + \cdots + a_0(z-z_0)^k + \ldots\right)}_{=g(z)}$$

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k} \quad \forall 0 < |z-z_0| < R$$

όπου $g = g(z)$ είναι ολόμορφη συνάρτηση στο z_0 με $g(z_0) \neq 0$.

Τελικά: (εναλλακτικός ορισμός)

z_0 πόλος της f τάξης $k \in \mathbb{N}$

$\Updownarrow$

$f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^k}$ με g κάποια ολόμορφη συνάρτηση στο z_0 για την οποία $\boxed{g(z_0) \neq 0}$

- Το z_0 καλείται **ΟΥΣΙΩΔΗΣ ΑΝΩΜΑΛΙΑ** της f, εάν υπάρχει ΑΠΕΙΡΟ ΠΛΗΘΟΣ <u>ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΩΝ</u> όρων a_n στο ανάπτυγμα Laurent της f ΜΕ ΔΕΙΚΤΕΣ n να είναι <u>ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ</u>.

π.χ. Τι είδους ανωμαλία είναι το σημείο $z_0 = 1$ για τη συνάρτηση $f(z) = \dfrac{1}{z^2-1}$;

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2-1} &= \frac{1}{(z-1)(z+1)} \overset{\text{απλά}}{\underset{\text{κλάσματα}}{=}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)+2} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{2}\right)^k, \quad \left|\frac{z-1}{2}\right| < 1 \qquad \left(\frac{1}{1-z} = \sum z^n \quad |z| < 1\right) \\
\frac{1}{z^2-1} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}(z-1) - \frac{1}{16}(z-1)^2 + \ldots \quad 0 < \left|\frac{z-1}{2}\right| < 1
\end{aligned}$$

Το $z_0 = 1$ είναι πόλος $1^{\text{ης}}$ τάξης εξ' ορισμού.

ΠΡΑΚΤΙΚΟΙ ΤΡΟΠΟΙ για ταξινόμηση ΑΠΟΜΕΝΩΜΕΝΩΝ ανώμαλων σημείων:
Έστω z_0 είναι απομονωμένο ανώμαλο σημείο της f. Τότε:

- z_0 είναι απαλείψιμη ανωμαλία $\iff$ υπάρχει το $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \lambda \in \mathbb{C}$ (όχι το ∞)

- z_0 πόλος τάξης $k \iff$ Ο $k \in \mathbb{N}$ ο μοναδικός φυσικός ώστε

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z) = \lambda \in \mathbb{C} - \underbrace{\{0\}}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ εδώ! Το όριο θέλω μη μηδενικό (επειδή μηδενίζεται για όλα τα επόμενα $n > k$)

- z_0 ουσιώδης ανωμαλία της $f \iff$ Το $\lim_{z \to z_0} f(z)$ <u>ΔΕΝ</u> υπάρχει

Τελικά:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \begin{cases} = \lambda \in \mathbb{C} & \Longrightarrow z_0 \text{ απαλείψιμη ανωμαλία} \\ \infty & \Longrightarrow z_0 \text{ πόλος} \\ \text{ΔΕΝ υπάρχει} & \Longrightarrow z_0 \text{ ουσιώδης ανωμαλία} \end{cases}$$

4.0.1 Πώς βρίσκουμε (κάποιες φορές) την τάξη ενός πόλου z_0

Λήμμα

Έστω $f = f(z)$ ολόμορφη σε σημείο z_0. Τότε:

z_0 ρίζα της f πολ/τας $\kappa \iff f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(\kappa-1)}(z_0) = 0$ και $f^{(\kappa)}(z_0) \neq 0$

Απόδειξη

" $\Longleftarrow$ " Αφού f ολόμορφη στο z_0 **αναπτύσσεται ΠΑΝΤΑ** σε σειρά Taylor "γύρω" από το z_0 ως εξής:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)(z_0)}}{n!} (z - z_0)^n \\ &= \cancel{f(z_0)} + \cancel{f'(z_0)}(z - z_0) + \cdots + \frac{\cancel{f^{(k-1)}(z_0)}}{(k-1)!}(z - z_0)^{k-1} + \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k + \ldots \\ &= (z - z_0)^k \underbrace{\left(\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} + \ldots \right)}_{=h(z)} \end{aligned}$$

$f(z) = (z - z_0)^k h(z)$, όπου $h(z)$ ολόμορφη στο z_0 με $h(z_0) \neq 0$

" $\Longrightarrow$ " Τότε $f(z) = (z - z_0)^k h(z)$, όπου h ολόμορφη στο z_0 με $h(z_0) \neq 0$. Παραγωγίζοτας $k - 1$ φορές παίρνουμε $f^{(j)}(z_0) = 0 \; \forall j = 0, 1, \ldots, k - 1$, ενώ $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.

- Έστω τώρα $f(z) = \frac{a(z)}{b(z)}$, όπου a, b είναι ολόμορφες στο z_0. Υποθέτουμε ότι το z_0 είναι ρίζα αριθμητή πολ/τας K ($K = 0, 1, 2, \ldots$) και ρίζα παρονομαστή πολ/τας Λ ($\Lambda = 1, 2, 3, \ldots$). Τότε:

$$z_0 \text{ είναι: } \begin{cases} \text{απαλείψιμη ανωμαλία για την } f & \text{εάν: } K \geq \Lambda \\ \text{πόλος τάξης } \Lambda - K & \text{εάν: } K < \Lambda \end{cases}$$

4.0.2 Υπολογισμός ολοκληρωτικού υπολοίπου σε απομονωμένο ανώμαλο σημείο z_0

Ορισμός: Ολοκληρωτικό υπόλοιπο

Σειρά Laurent της f στο z_0:

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots$$

Ο όρος $a_{-1} = \oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ καλείται ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο z_0, συμβολικά $\mathrm{Res}(f, z_0)$.

Έστω z_0 είναι απομονωμένο ανώμαλο σημείο συνάρτησης f.

- Αν z_0 **απαλείψιμη ανωμαλία**, τότε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο z_0

  $$\mathrm{Res}(f, z_0) = 0$$

  Τελικά:

  $$\boxed{z_0 \text{ απαλείψιμο} \implies \mathrm{Res}(f, z_0) = 0}$$

- Αν z_0 είναι πόλος τάξης N, τότε το $\mathrm{Res}(f, z_0)$ βρίσκεται ως εξής:

  Εφόσον z_0 πόλος τάξης N έχουμε:

  $$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots$$

  $$(z-z_0)^k f(z) = a_{-k} + a_{-k+1}(z-z_0) + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{k-1} + a_0(z-z_0)^k + \ldots$$

  $$\implies \left((z-z_0)^k f(z)\right)^{\overbrace{(k-1)}^{\text{παράγωγος}}} = (k-1)!a_{-1} + a_0(k\cdots 2)(z-z_0) + \ldots$$

  $$\implies \lim_{z\to z_0}\left[\left((z-z_0)^k f(z)\right)^{(k-1)}\right] = (k-1)!a_{-1}$$

  $$\implies \boxed{a_{-1} \overset{\text{ορ.}}{=} \mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\left[\left((z-z_0)^k f(z)\right)^{(k-1)}\right]}$$

  Προσοχή! Το $^{(k-1)}$ είναι **ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ**!

- z_0 **ουσιώδης ανωμαλία**: Τότε **αναγκαστικά** θα πρέπει να βρείτε το ανάπτυγμα Laurent της f στο z_0 και μέσω αυτού να υπολογίσετε τον όρο $a_{-1} = \mathrm{Res}(f, z_0)$

Θεώρημα: Ολοκληρωτικών υπολοίπων

Έστω $f = f(z)$ είναι ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό απλής, κλειστής, τμημ. λείας και θετικά προσανατολισμένης καμπύλης γ, εκτός **ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΥ ΠΛΗΘΟΥΣ ΑΠΟΜΟΝΩΜΕΝΩΝ ΑΝΩΜΑΛΩΝ** σημείων $z_1, \ldots, z_n$ στο ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ της γ. Τότε:

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_j)$$

Θεώρημα: Αρχή ταυτισμού

Έστω $f = f(z)$ είναι ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό απλής, κλειστής, τμηματικά λείας και θετικά προσανατολισμένης καμπύλης γ.
Αν $\{z_\kappa\}_{\kappa \in \mathbb{Z}}$ ακολουθία σημείων στο εσωτερικό της γ, με $z_\kappa \neq z_\lambda \ \forall \kappa \neq \lambda$ και είναι τέτοια ώστε $\lim\limits_{\kappa \to \infty} z_\kappa = z_0$ ανήκει στο εσωτερικό της γ.
Τότε, εάν $f(z_\kappa) = 0 \ \forall \kappa$, ισχύει:

$$f(z) = 0 \quad \forall z \text{ στο εσωτερικό της } \gamma$$

Άσκηση Να ταξινομηθούν όλα τα ανώμαλα σημεία των συναρτήσεων

(α) $f(z) = \dfrac{1 - \cos(z)}{z^2}$

(β) $g(z) = \dfrac{e^{z^2}}{z^3}$

(γ) $h(z) = \dfrac{\cos\left({}^1/_z\right)}{z}$

(δ) $k(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$

και να υπολογιστούν τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα στα σημεία αυτά.

(α) Ανώμαλα σημεία της f (σημεία όπου η f) "πιθανώς" δεν ορίζεται ή αν ορίζεται δεν είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη):

"Το μοναδικό ανώμαλο σημείο είναι αυτό που μηδενίζει τον παρονομαστή, δηλαδή το $\boxed{z_0 = 0}$."

Προφανώς το $z_0 = 0$ μηδενίζει τον παρονομαστή της f δύο φορές, δηλαδή το $z_0 = 0$ είναι διπλή ρίζα του παρονομαστή.

Έστω

$$\begin{aligned} a(z) &= \text{"αριθμητής"} = 1 - \cos(z), \quad a(0) = 1 - \cos(0) = 0 \\ a'(z) &= \sin(z), \quad a'(0) = 0 \\ a''(z) &= \cos(z), \quad a''(0) = 1 \neq 0 \end{aligned}$$

Άρα το $z_0 = 0$ είναι **διπλή** ρίζα του αριθμητή.

Επομένως, το $z_0 = 0$ είναι "απαλείψιμη ανωμαλία", διότι:

πολλαπλότητα ρίζας $z_0 = 0$ του αριθμητή $= 2 \ \geq$ πολλαπλότητα ρίζας $z_0 = 0$ του παρονομαστή $= 2$

Αφού το $z_0 = 0$ είναι απαλείψιμη ανωμαλία:

$$\boxed{\mathrm{Res}(f, 0) = 0}$$

(β) Το $z_0 = 0$ είναι το μοναδικό ανώμαλο σημείο της g. Προφανώς η ρίζα του παρονομαστή είναι πολλαπλότητας 3. Το $z_0 = 0$ δεν μηδενίζει τον αριθμητή, διότι $e^{0^2} = 1 \neq 0$, άρα η πολλαπλότητα του $z_0 = 0$ για τον αριθμητή είναι ίση με 0 και έτσι το $z_0 = 0$ είναι **πόλος**, τάξης:

$$\left.\begin{array}{l} \text{πολλαπλότητα ρίζας } z_0 = 0 \text{ του παρονομαστή} \\ \quad - \\ \text{πολλαπλότητα ρίζας } z_0 = 0 \text{ του αριθμητή} \end{array}\right\} 3 - 0 = 3$$

Τότε:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(g,0) &= \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left([z-0]^3\frac{e^{z^2}}{z^3}\right)'' \\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\lim_{z\to 0}\left[\left(e^{z^2}\right)''\right] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(2ze^{z^2}\right)' \\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(2e^{z^2}+4z^2e^{z^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot 2 = 1
\end{aligned}$$

(γ) Το μοναδικό ανώμαλο σημείο είναι το $z_0 = 0$

Σημείωση

Αν z_0 είναι **πόλος** για συνάρτηση f και αν η g είναι ακεραία, τότε το z_0 είναι ουσιώδης ανωμαλία για την $g \cdot f$.

Έτσι, με βάση τη σημείωση αυτή το z_0 είναι ουσιώδης ανωμαλία.

Άρα:

$$\operatorname{Res}(h,0) \overset{\text{ορισμός}}{=} a_1 \quad \begin{array}{l}\text{(ο οποίος είναι συντελεστής του } \frac{1}{z-z_0} \overset{z_0=0}{=} \frac{1}{2}\text{),} \\ \text{στο ανάπτυγμα Laurent της } h \text{ με κέντρο το } z_0 = 0.\end{array}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned}
\cos(z) &\overset{\text{McLaurin}}{=} 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \dots \quad z \in \mathbb{C} \\
\cos\left(\frac{1}{z}\right) &= 1 - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{24z^4} - \dots \quad z\, in \mathbb{C} - \{0\} \\
\frac{1}{z}\cdot\cos\left(\frac{1}{z}\right) &= \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^3} + \frac{1}{24z^3} - \dots \quad z \in \mathbb{C} - \{0\}
\end{aligned}$$

Έτσι:

$$\operatorname{Res}(h,0) = \text{"συντελεστής του } \frac{1}{z} \text{ στο ανάπτυγμα Laurent της } h\text{"} = 1.$$

(δ) $k(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$

Σημεία που μηδενίζουν παρονομαστή

$$e^z = 1 \iff z = \log 1 = \ln 1 + i(0 + 2k\pi) = 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Άρα τα σημεία $z_k = 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z})$ ανώμαλα σημεία της $k(z)$.

Για $n = 0$ έχουμε $z_0 = 0$ ανώμαλο σημείο της $k(z)$ που μηδενίζει τον παρονομαστή και αριθμητή 1 φορά άρα απαλείψιμο.

$$\mathrm{Res}(k, 0) = 0$$

Για $n \neq 0$ έχουμε $z_n = 2n\pi i$ μηδενίζουν μια φορά παρονομαστή, καμία αριθμητή, άρα πόλοι 1ης τάξης.

Έτσι:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(k, z_n) &= \frac{1}{1} \lim_{z \to z_n} (z - z_n) k(z) \\
&= \lim_{z \to z_n} (z - z_n) \frac{z}{e^z - 1} \overset{\text{L' Hosp.}}{=} \\
&= \lim_{z \to z_n} \frac{z + z - z_n}{e^z} = \frac{z_n}{e^{z_n}} = \frac{2n\pi i}{e^{2n\pi i}} = 2n\pi i
\end{aligned}$$

(2) Υπολογίστε το $\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{\cosh z} \, \mathrm{d}z$

(α) τύπος (θεώρ. ολοκλ. υπολοίπων)

(β) ανώμαλα σημεία, θέλεις ΕΝΤΟΣ καμπύλης

(γ) ταξινόμηση ανώμαλων

(δ) υπολ. $\mathrm{Res}(f, z_j)$, z_j ανώμαλα

(α) Από θεωρία έχω:

$$I = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}\left(\frac{e^z}{\cosh h}, z_j\right)$$

όπου z_j ανώμαλα σημεία εντός κύκλου: $|z| = 3$

(β) Ανώμαλα σημεία της $e^z / \cosh z$:

$$\cosh z = 0 \overset{\text{ορ.}}{\iff} \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 0 \iff e^z + e^{-z} = 0$$

$$e^z + \frac{1}{e^z} = 0 \underset{\forall z}{\overset{z \neq 0}{\iff}} e^{2z} + 1 = 0 \iff e^{2z} = -1 \iff 2z = \log(-1) = \ln(-1) + i(\pi + 2i\pi)$$

$$\Longrightarrow \boxed{z = \left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) i, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

$z = \frac{\pm \pi i}{2}, \frac{\pm 3\pi i}{2}, \frac{\pm 5\pi i}{2}$ ανώμαλα σημεία

Άρα μένουν οι $z_1 = \frac{\pi i}{2}$ και $z_2 = \frac{-\pi i}{2}$ βρίσκονται ΕΝΤΟΣ κύκλου $|z| = 3$.

Έτσι από θεώρημα ολοκλ. υπολοίπων έχουμε:

$$I = 2\pi i \left(\mathrm{Res}\left(\frac{e^z}{\cosh z}, \frac{\pi i}{2}\right) + \mathrm{Res}\left(\frac{e^z}{\cosh z}, \frac{-\pi i}{2}\right) \right)$$

(γ) Αλλά το $z_1 = \frac{\pi i}{2}$ είναι πόλος 1ης τάξης, διότι

- μηδενίζει μια φορά τον παρονομαστή, αφού

$$A(z) = \cosh z, \quad \cosh\left(\frac{\pi i}{2}\right) = 0$$
$$A'(z) = \sinh z, \quad \sinh\left(\frac{\pi i}{2}\right) \neq 0$$

(τα μηδενικά του $\sinh z$ είναι στα $k\pi i$)
και προφανώς δε μηδενίζει καθόλου τον αριθμητή, αφού

$$e^z \neq 0 \quad \forall z$$

άρα και

$$e^{\pi i/2} \neq 0$$

(δ) Ακριβώς με την ίδια λογική, το $z_1 = -\frac{\pi i}{2}$ είναι πόλος 1ης τάξης.

(ε)

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{\cosh z}, \frac{\pi}{2}\right) &= \lim_{z\to\frac{\pi i}{2}}\left(\left(z - \frac{\pi i}{2}\right)\frac{e^z}{\cosh z}\right) \overset{\text{L' Hospital}}{=} \\ &= \lim_{z\to\frac{\pi i}{2}} \frac{e^z\left(z - \frac{\pi i}{2}\right) + e^z}{\sinh z} \\ &= \frac{e^z}{\sinh\left(\frac{\pi i}{2}\right)}\end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{\cosh z}, \frac{-\pi i}{2}\right) &= \lim_{z\to\frac{-\pi i}{2}}\left(z + \frac{\pi i}{2}\right)\frac{e^z}{\cosh z} \\ &= \frac{e^{-\pi i/2}}{\sinh\left(\pi i/2\right)}\end{aligned}$$

(□) Τελικά

$$I = 2\pi i\left(\frac{e^{\pi i/2}}{\sinh\left(\frac{\pi i}{2}\right)} + \frac{e^{-\pi i/2}}{\sinh\left(\frac{-\pi i}{2}\right)}\right)$$

4.1 Εφαρμογές ολοκλ. υπολοίπων

4.1.1 Λήμμα Jordan

Έστω $f = f(z)$ είναι ολόμορφη στο διάτρητο δίσκο

$$0 < |z - z_0| < R,$$

το z_0 είναι **ΑΠΛΟΣ ΠΟΛΟΣ** της f (δηλ. πόλος 1ης τάξης), και έστω γ_ρ είναι το τόξο $\gamma_\rho := \{z : z = z_0 + \rho e^{i\theta}\}$ και $\rho < R$. Τότε:

$$\lim_{\rho\to 0^+}\int_{\gamma_\rho} f(z)\,\mathrm{d}z = i\,(\theta_1 - \theta_0)\operatorname{Res}(f, z_0)$$

Απόδ.

$$\int_{\gamma_\rho} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_\rho} \left(\frac{a_{-1}}{z - z_0} + h(z) \right) \mathrm{d}z, \text{ όπου}$$

$h = h(z)$ ολόμορφη στο z_0, διότι το z_0 είναι <u>απλός πόλος</u> της f.

$$\begin{aligned} I_0 &= a_{-1} \int_{\gamma_\rho} \frac{1}{z - z_0}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_\rho} h(z)\,\mathrm{d}z \\ &= a_{-1} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{1}{\rho e^{i\theta}} i\rho e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta + \int_{\gamma_\rho} h(z)\,\mathrm{d}z \\ I_0(\rho) &= \mathrm{Res}(f, z_0) \cdot i(\theta_1 - \theta_0) + \int_{\gamma_\rho} h(z)\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

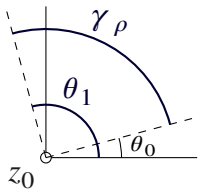
Παίρνοντας όριο, $\rho \to 0^+$, έχουμε:

$$\lim_{\rho \to 0^+} \int_{\gamma_r ho} f(z)\,\mathrm{d}z = i(\theta_1 - \theta_0)\,\mathrm{Res}(f, z_0) + \lim_{\rho \to 0^+} \int_{\gamma_\rho} h(z)\,\mathrm{d}z$$

Αρκεί ΝΔΟ $\lim_{\rho \to 0^+} \int_{\gamma_\rho} h(z)\,\mathrm{d}z = 0$.
Αλλά h ολόμορφη στο $z_0 \implies h$ συνεχής στο $z_0 \implies h$ φραγμένη σε μία περιοχή του z_0. Έτσι:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_\rho} \right| &\le \int_{\gamma_\rho} |h(z)|\,|\mathrm{d}z| \le M \cdot \int_{\gamma_\rho} |\mathrm{d}z| \\ &= (\theta_1 - \theta_0)\rho M \to 0, \end{aligned}$$

όπου M είναι άνω φράγμα της h σε μια περιοχή του z_0.



4.1.2 Υπολογισμός περίπλοκων ολοκληρωμάτων της μορφής $\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x$

Θεώρημα

Έστω $f = f(z)$ ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ εκτός από πεπερασμένου πλήθους απομονωμένα ανώμαλα σημεία, και η f τέτοια ώστε

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0.$$

Υποθέτουμε ότι η f έχει:

- ανώμαλα σημεία $z_1, \dots, z_n$ ΣΤΟ ΑΝΩ ΗΜΙΕΠΙΠΕΔΟ $\mathrm{Im}(z) > 0$
- ανώμαλα σημεία $w_1, \dots, w_k$ ΣΤΟ ΚΑΤΩ ΗΜΙΕΠΙΠΕΔΟ $\mathrm{Im}(z) < 0$
- <u>ΠΟΛΟΥΣ 1ης τάξης μόνον</u> $\zeta_1, \dots, \zeta_r$ πάνω στον ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΑΞΟΝΑ.

Τότε:

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \overbrace{\mathrm{Res}(f, z_j)}^{\text{άνω ημιεπίπεδο}} + \pi i \sum_{\lambda=1}^{r} \overbrace{\mathrm{Res}(f, z_\lambda)}^{\text{απλοί πόλοι πάνω σε πραγμ. άξονα}}$$

ή **ισοδύναμα**:

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x = -2\pi i \sum_{\mu=1}^{k} \overbrace{\mathrm{Res}(f, w_\mu)}^{\text{κάτω ημιεπίπεδο}} - \pi i \sum_{\lambda=1}^{r} \overbrace{\mathrm{Res}(f, \zeta_\lambda)}^{\text{απλοί πόλοι πάνω σε πραγμ. άξονα}}$$

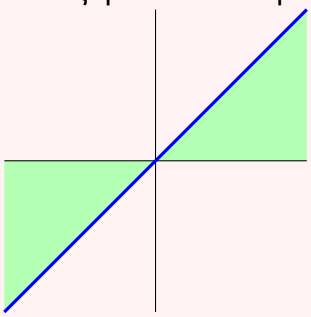
4.1.3 Ασκήσεις

Άσκ. Υπολογίστε το $\underbrace{\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}}_{\text{τέτοια ολοκληρώματα καλούνται καταχρηστικά ή κατά Cauchy}} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+4x+5)^2}$

Το $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{d}x$ δεν υπάρχει, επειδή

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{d}x = \lim_{N,M\to 0}\int_{N}^{M} x\,\mathrm{d}x$$

που εξαρτάται από την διαδρομή που ακολουθούν τα M, N.



(α) Θεωρώ $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z^2+4z+5)^2}$

(β) Ελέγχω αν ισχύει η συνθήκη

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$$

$$\lim_{z\to\infty} \frac{z}{(z+1)(z^2+4z+5)^2} = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{z^5} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{z}\right)\left(1+\frac{4}{z}+\frac{5}{z^2}\right)^2}$$
$$= \lim_{z\to\infty} \frac{1}{z^4} \cdot \lim_{z\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{z}\right)\left(1+\frac{4}{z}+\frac{5}{z^2}\right)^2} = 0 \cdot 1 = 0$$

(γ) Υπολογίζω **όλα** τα ανώμαλα σημεία της f και τα ταξινομώ:

$$(z+1)(z^2+4z+5)^2 = 0 \iff$$
$$\iff z_0 = -1 \text{ (απλή ρίζα)} \quad \text{και } z_{1,2} = \frac{-4 \pm 2i}{2}$$
$$\iff z_0 = -1 \text{ (απλή)} \quad \text{και } z_{1,2} = -2 \pm i \text{ (διπλές ρίζες)}$$

Έτσι:

$z_0 = -1$ (απλός πόλος στον πραγματικό άξονα)
$z_1 = -2 + i$ (διπλός πόλος στο άνω ημιεπίπεδο)
$z_2 = -2 - i$ (διπλός πόλος στο κάτω ημιεπίπεδο)

(δ) Τύπος:

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x = +\overbrace{2\pi i \cdot \mathrm{Res}(f, -2+i)}^{\text{ανώμαλο στο άνω ημιεπίπεδο}} + \pi i\,\mathrm{Res}(f, -1)$$

(ε) Υπολογισμός ολοκλ. υπολοίπου

- $\mathrm{Res}(f, -1) = \lim_{z\to-1} (z+1)\dfrac{1}{(z+1)(z^2+4z+5)^2} = \dfrac{1}{4}.$
- $\mathrm{Res}(f, z_1) = \lim_{z\to z_1} \left((z-z_1)^2 \dfrac{1}{(z+1)(z-z_1^2)(z-z_2)^2} \right)'$

  όπου $z_1 = -2+i$, $z_2 = -2-i$

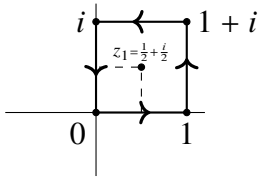
$$= \lim_{z\to z_1} \left(\frac{1}{(z+1)(z-z_2)^2} \right)' = -\lim_{z\to z_1} \frac{(z-z_2)^2 + 2(z+1)(z-z_2)}{(z+1)^2(z-z_2)^4}$$
$$= -\frac{(z_1-z_2) + 2(z_1+1)}{(z_1+1)^2(z_1-z_2)^3}$$

$z_1 - z_2 = \cancel{-2} + i + \cancel{2} + i$

$$= -\frac{2i + 2(i-1)}{(i-1)^2(2i)^3} = \frac{4i-2}{+2\cdot 8}$$
$$= \boxed{\frac{2i-1}{8}}$$

(□) Τελικό αποτέλεσμα

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+4x+5)^2} = 2\pi i \cdot \frac{2i-1}{8} + \pi i \cdot \frac{1}{4}$$
$$= -\frac{\pi}{2} - \cancel{\frac{\pi i}{4}} + \cancel{\frac{\pi i}{4}} = -\frac{\pi}{2}$$

Άσκ. Υπολογίστε το $\oint_\gamma \frac{1}{z\,(z-z_1)^2}\,\mathrm{d}z$, όπου γ είναι το τετράγωνο: 

με θετική φορά.

Εφαρμόζω θεώρ. ολοκλ. υπολοίπων

$$I = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}\left(f,\ \begin{array}{c}\text{στα ανώμαλα σημεία}\\ \textbf{ΕΝΤΟΣ}\ \text{τετραγώνου}\end{array}\right) + i\frac{\pi}{2}\,\overset{\text{πάνω στην καμπύλη}}{\mathrm{Res}(f,\widehat{0})}$$

- $\mathrm{Res}(f,0) \underset{\text{πόλος}}{\overset{z=0\ \text{απλός}}{=}} \lim_{z\to 0} z\frac{1}{z(z-z_1)^2} = \frac{1}{z_1^2}$
- $\mathrm{Res}(f,z_1) \underset{\text{πόλος}}{\overset{\text{δεύτερης}}{=}} \lim_{z\to z_1}\left((z-z_1)^2\frac{1}{z(z-z_1)^2} = \lim_{z\to z_1} -\frac{1}{z^2} = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\right)}\right)$

Αντικαθιστώντας παραπάνω προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα.

4.1.4 Υπολογισμός ολοκληρωμάτων της μορφής $\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$

όπου R είναι μια ρητή συνάρτηση των $\sin\theta$ και $\cos\theta$

Μεθοδολογία: Θέτουμε $z = e^{i\theta}, \quad \theta\in[0,2\pi)$
Τότε:

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}\left(e^{i\theta}\right) = ie^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta = iz\,\mathrm{d}\theta$$

άρα $\boxed{\mathrm{d}z = iz\,\mathrm{d}\theta}$

Επίσης: $\begin{cases}\cos\theta &= \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z+z^{-1}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}\\ \sin\theta &= \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z-z^{-1}}{2i} = \frac{z^2-1}{2iz}\end{cases}$
Αντικαθιστούμε τα παραπάνω και παίρνουμε:

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2-1}{2iz},\frac{z^2+1}{2z}\right)\frac{\mathrm{d}z}{iz} = \oint_{|z|=1} K(z)\,\mathrm{d}z,$$

όπου K είναι μια ρητή συνάρτηση του z. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε το θ. ολοκλ. υπολοίπων, και έχουμε:

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}(K,z_j),$$

όπου $z_j, {\scriptstyle j=1,\dots,n}$ ανώμαλα σημεία της K εντός του μοναδιαίου κύκλου $|z|=1$.

Παράδειγμα: Υπολογίστε το $\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{2+\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$

(α) Θέτω $z = e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi)$

Τότε

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}\left(e^{i\theta}\right) = ie^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta = iz\,\mathrm{d}z$$

άρα $\boxed{\mathrm{d}z = iz\,\mathrm{d}\theta}$

- $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \dfrac{z - z^{-1}}{2i} = \dfrac{z^2 - 1}{2iz}$
- $\cos(2\theta) = \dfrac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}}{2} \overset{z=e^{i\theta}}{=} \dfrac{z^2 + z^{-2}}{2} = \dfrac{z^4 + 1}{2z^2}$

Τότε

$$\begin{aligned} I &= \oint_{|z|=1} \frac{\frac{z^4+1}{2z^2}}{2 + \frac{z^2-1}{2iz}} \frac{\mathrm{d}z}{iz} \\ &= \oint_{|z|=1} \frac{z^4 + 1}{z^2(z^2 + 4iz - 1)}\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

(β) Ανώμαλα σημεία: Εκείνα που μηδενίζουν τον παρονομαστή. Άρα

$$z^2(z^2 + 4iz - 1) = 0 \iff$$

$$z = 0 \text{ (διπλή)} \quad \text{ή} \quad z_{1,2} = \frac{-4i \pm \sqrt{16i^2 + 4}}{2} = -2i \pm i\sqrt{3} = i\left(-2 \pm \sqrt{3}\right)$$

Από αυτά με ενδιαφέρουν μόνον τα ανώμαλα σημεία ΕΝΤΟΣ του μοναδιαίου κύκλου, δηλ.:

$$z_0 = 0 \text{ (διπλή)}$$
$$z_1 = i\left(-2 + \sqrt{3}\right)$$

(γ) Ταξινόμηση ανώμαλων σημείων και υπολογισμός ολοκληρωτικών υπολοίπων

$z_0 = 0$ είναι πόλος 2ης τάξης (μηδενίζει δύο φορές τον παρονομαστή, καμία τον αριθμητή)

$z_1 = i\left(-2 + \sqrt{3}\right)$ πόλος 1ης τάξης

Ο τύπος $\mathrm{Res}(f, z_0) = \dfrac{1}{(N-1)!} \lim\limits_{z \to z_0} \left((z - z_0)^N f(z)\right)^{(N-1)}$ θα δίνεται

και έτσι αν $f(z) = {(z^4 + 1)}/{z^2(z^2 + 4iz - 1)}$, τότε

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(f, 0) &= \lim_{z \to 0} \left(\cancel{z^2} \frac{z^4 + 1}{\cancel{z^2}(z^2 + 4iz - 1)} \right) \\ &= \lim_{z \to 0} \frac{4z^3(z^2 + 4iz - 1) - (2z + 4i)(z^4 + 1)}{(z^2 + 4iz - 1)^2} \\ &= -4i \end{aligned}$$

Έστω $z_1 = i\left(-2+\sqrt{3}\right)$ και $z_2 = i\left(-2-\sqrt{3}\right)$. Τότε

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f, z_1) &= \lim_{z\to z_1} \cancel{(z-z_1)} \frac{z^4+1}{z^2\cancel{(z-z_1)}(z-z_2)} \\
&= \frac{z_1^4+1}{z_1^2(z_1-z_2)} \\
&= \frac{\left(\sqrt{3}-2\right)^4+1}{-\left(\sqrt{3}-2\right)^2\cdot i2\sqrt{3}} = i\frac{\left(\sqrt{3}-2\right)^4+1}{2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-2\right)^2}
\end{aligned}$$

(δ) Τελικά από θεώρημα ολοκλ. υπολοίπων έχω:

$$\begin{aligned}
I &= 2\pi i\left(-4i + i\frac{(\sqrt{3}-2)^4+1}{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)^2}\right) \\
&= 8\pi - \pi\cdot\frac{(\sqrt{3}-2)^4+1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)^2}
\end{aligned}$$

4.1.5 Υπολογισμός μετασχηματισμού Fourier τοπικά ολοκληρώσιμης συνάρτησης f

$$\hat{f}(\omega) = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x$$

όπου $x\in\mathbb{R},\ \omega\in\mathbb{R}$

Θεώρημα

Έστω $f = f(z)$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ εκτός πεπερασμένου πλήθους απομονωμένων ανώμαλων σημείων και η f έτσι ώστε:

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$$

Υποθέτουμε ότι:

(α) Η f έχει ανώμαλα σημεία $z_1,\dots,z_n$ στο ΑΝΩ ΗΜΙΕΠΙΠΕΔΟ $\operatorname{Im}(z) > 0$

(β) Η f έχει ανώμαλα σημεία $w_1,\dots,w_m$ στο ΚΑΤΩ ΗΜΙΕΠΙΠΕΔΟ $\operatorname{Im}(z) < 0$

(γ) Η f έχει **ΑΠΛΟΥΣ ΠΟΛΟΥΣ** $\zeta_1,\dots,\zeta_r$ πάνω στον **πραγματικό άξονα**.

Τότε

(α) Αν $\boxed{\omega < 0}$, έχουμε:

$$\hat{f}(\omega) = 2\pi i\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Res}\left(f(z)e^{-i\omega z}, z_j\right) + \pi i\sum_{\mu=1}^{r}\operatorname{Res}\left(f(z)e^{-i\omega z}, \zeta_\mu\right)$$

(β) Αν $\boxed{\omega > 0}$, έχουμε:

$$\hat{f}(\omega) = -2\pi i\sum_{\lambda=1}^{m}\operatorname{Res}\left(f(z)e^{-i\omega z}, \underset{\substack{\text{κάτω}\\ \text{ημιεπ.}}}{w_\lambda}\right) - \pi i\sum_{\mu=1}^{r}\operatorname{Res}\left(f(z)e^{-i\omega z}, \zeta_\mu\right).$$

Άσκ. Υπολογίστε το $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \quad (k \in \mathbb{Z}^*)$

Σκέφτομαι να χρησιμοποιήσω e^{-ikx} και μετασχηματισμό Fourier.

- Ορίζω $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$
- Προφανώς: $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{1}{z^2+1} = \lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{1}{z^2} \cdot \dfrac{1}{1+\frac{1}{z^2}} = 0 \cdot 1 = 0$
- Ανώμαλα σημεία της f: αυτά που μηδενίζουν παρονομαστή, άρα:

  $$z^2+1 = 0 \iff \boxed{z = \pm i},$$

  τα οποία είναι προφανώς απλοί πόλοι.
- Χωρίς περιορισμό γενικότητας, εργάζομαι μόνον για $k > 0$ (διότι λόγω $\cos$ που είναι άρτια συνάρτηση ισχύει $I_{-k} = I_k \quad (k > 0)$).

  Τότε, από θεωρία:

  $$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x = -2\pi i \cdot Res\left(f(z)e^{-ikz}, -i\right)$$

- Αλλά:

  $$\begin{aligned}\mathrm{Res}\left(f(z)e^{-ikz}, -i\right) &= \lim_{z\to -i}(z+i)\frac{e^{-ikz}}{z^2+1} \\ &= \lim_{z\to -i}\frac{e^{-ikz}}{z-i} = \frac{e^{-k}}{-2i} = i\frac{e^{-k}}{2}\end{aligned}$$

Τελικά:

$$\begin{aligned}&\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x = -2\pi i \cdot i\frac{e^{-k}}{2} = \underline{\pi e^{-k}} \\ \implies &\lim_{R\to+\infty} \int_{R}^{R} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x - i\lim_{R\to+\infty}\int_{R}^{R} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x = \pi e^{-k} - 0 \\ \implies &\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \pi e^{-k} \quad (k > 0)\end{aligned}$$

Εφόσον $I_{-k} = I_k$, τελικά:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \pi e^{-k}\ \forall k \in \mathbb{Z}^*$$

Αν ήθελα να υπολογίσω το $\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\cos(kx)}{x^2+1}\right)$, με $f(z) = \frac{\cos(kz)}{z^2+1}$, παρατηρώ ότι $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) \neq 0$.

4.1.6 Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Είναι γνωστό ότι αν $f : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ είναι τμηματικά συνεχής στο $[0, b]\ \forall b > 0$ και εκθετικής τάξης $a \in \mathbb{R}$, δηλ.

$$|f(t)| \leq Ce^{at} \quad \forall t > b,$$

όπου $b, c > 0$, τότε ορίζεται ο μετασχηματισμός Laplace ως εξής:

$$L(f)(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}\,\mathrm{d}t \qquad \forall z : |z| > a$$

Τότε: $\lim\limits_{z\to\infty} F(z) = 0$

Θεώρημα: Αντιστροφή Laplace

Έστω $F = F(z)$ είναι ο μετασχ. Laplace συνάρτησης f, και έστω ότι η F είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$, εκτός πεπερασμένου πλήθους απομονωμένων ανώμαλων σημείων $z_1, \dots, z_n$ (και φυσικά $\lim_{z\to\infty} F(z) = 0$).
Τότε για οποιοδήποτε $\gamma \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε όλα τα ανώμαλα σημεία της F βρίσκονται στα αριστερά της κατακόρυφης ευθείας $\gamma + it,\ t \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} F(z)e^{zt}\,\mathrm{d}z \qquad {\scriptstyle (t\geq 0)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}\left(F(z)e^{zt}, z_j\right) \end{aligned}$$

π.χ. Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Laplace της $F(z) = \dfrac{z}{(z+4)(z-1)} \qquad (|z| > 1)$

- Προφανώς $\lim\limits_{z\to\infty} = 0$
- Έχω δύο ανώμαλα σημεία $z = -4,\ z = 1$ που είναι απλοί πόλοι

  Τότε:

  $$f(t) = \operatorname{Res}\left(F(z)e^{zt}, -4\right) + \operatorname{Res}\left(F(z)e^{zt}, 1\right)$$

- **Αλλά**:
  - $\operatorname{Res}\left(F(z)e^{zt}, 4\right) = \lim\limits_{z\to -4} \dfrac{\cancel{(z-4)}e^{zt}\cdot z}{\cancel{(z+4)}(z-1)} = \dfrac{4e^{-4t}}{5}$
  - $\operatorname{Res}\left(F(z)e^{zt}, 1\right) = \lim\limits_{z\to 1} \cancel{(z-1)}\dfrac{e^{zt}\cdot z}{(z+4)\cancel{(z-1)}} = \dfrac{e^t}{5}$
- **Τελικά:**

  $$f(t) = \frac{e^t}{5} + \frac{4e^{-4t}}{5}$$

Άσκ. Αν $\underline{z_0 \text{ πόλος}}$ της $f = f(z)$ τάξης N, ΝΔΟ $\underline{z_0 \text{ πόλος}}$ της f' τάξης $N+1$

Θα χρειαστούμε τον ορισμό του πόλου.

Αφού z_0 πόλος της f τάξης N, τότε, εξ' ορισμού:

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^N}, \text{ όπου } h(z) \text{ ολόμορφη στο } z_0 \text{ με } h(z_0) \neq 0$$

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{h'(z)(z-z_0)^N - N(z-z_0)^{N-1}h(z)}{(z-z_0)^{2N}} \\ &= \frac{h'(z)(z-z_0) - Nh(z)}{(z-z_0)^{N+1}}, \end{aligned}$$

άρα z_0 πόλος τάξης $N+1$ της f', διότι μηδενίζει $N+1$ φορές παρονομαστή (το z_0) ενώ δε μηδενίζει αριθμητή, εφόσον

$$h'(z_0)\,(z_0 - z_0) - Nh(z_0) = -Nh(z_0) \neq 0$$

(αφού $h(z_0) \neq 0$)

Άσκ. Υπολογίστε το $I = \int_{|z+2|=1} (z-3)\sin\left(\frac{1}{z+2}\right) \mathrm{d}z$

Επειδή το ολοκλήρωμα δεν είναι στο ∞, δεν χρησιμοποιώ Fourier/Laplace, απλώς το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων.

- Από θεωρ. υπολοίπων:

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}\left(f, z_j \text{όλα τα ανώμαλα εντός κύκλου}\right) \\ &= 2\pi i \,\mathrm{Res}\,(f, -2)\,, \end{aligned}$$

  διότι -2 ανήκει στον κύκλο $|z+2| = 1$.

- Ταξινόμηση του $z_0 = -2$.

  Το $z_0 = -2$ ουσιώσης ανωμαλία (σύνθεση ολόμορφης - της $\sin z$ - με την $\frac{1}{z+2}$ που έχει απλό πόλο. Εμπειρικά τότε η $\sin\left(\frac{1}{z+2}\right)$ έχει ουσιώδη ανωμαλία στο $z_0 = -2$)

- Υπολογισμός υπολοίπου Αφού $z_0 = -2$ ουσιώδες ανώμαλο σημείο της $(z-3)\sin\left(\frac{1}{z+2}\right)$, αναπτύσσω σε σειρά Laurent.

  Θέτω $z+2 = u$, τότε: $(z-2)\sin\left(\frac{1}{z+2}\right) = (u-5)\sin\left(\frac{1}{u}\right) \overset{\text{τύπος}}{=} (u-5)\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{3!u^3} + \frac{1}{5!u^5} - \dots\right) =$
  $1 - \frac{1}{3!u^2} + \frac{1}{5!u^4} - \dots - \frac{5}{u} + \frac{5}{6u^3} - \frac{1}{24u^5} + \dots = 1\boxed{-\frac{5}{u}} - \frac{1}{6u^2} - \dots = 1 - \frac{5}{z+2} - \dots$

  Θα δίνονται τύποι μερικών γνωστών σειρών McLaurin στο τυπολόγιο.

  Εξ' ορισμού: $\mathrm{Res}(f, -z) = -5$.

  Τελικά:

$$I = 2\pi i(-5) = -10\pi i$$

Μέρος II

Κεχαγιάς

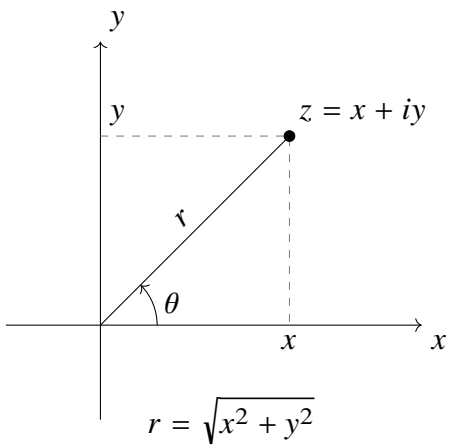
Σπιτεργασίες λιγότερες από πέρσι, για 1 βαθμό, αφορούν μόνο το μέρος του Κεχ.

1. ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ
2. ΒΑΣΙΚΕΣ ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
3. ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ, ΣΕΙΡΕΣ
4. ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ
5. ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
6. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ με μερικές παραγώγους

Κεφάλαιο 5 Μιγαδικοί αριθμοί

$$
\begin{aligned}
z =& x + iy \in \mathbb{C} \\
& x, y \in \mathbb{R} \qquad i^2 = -1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_1 &= x_1 + iy_1 \\
z_2 &= x_2 + iy_2 \\
z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\
z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) \\
&= x_1x_2 + iy_1y_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 \\
&= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy^2)(x_2 - iy_2)} \\
&= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{-x_1y_2 + x_2y_1}{x_2^2 + y_2^2} \\
z &= x + iy \\
\bar{z} &= x - iy \\
\mathrm{Re}(z) &= x \in \mathbb{R} \\
\mathrm{Im}(z) &= y \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \arctan \tfrac{y}{x}$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}} = |z| \leftarrow$ μέτρο του z

γενίκευση της απόλυτης τιμής (δηλ. $z = x \in \mathbb{R}$, $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$)

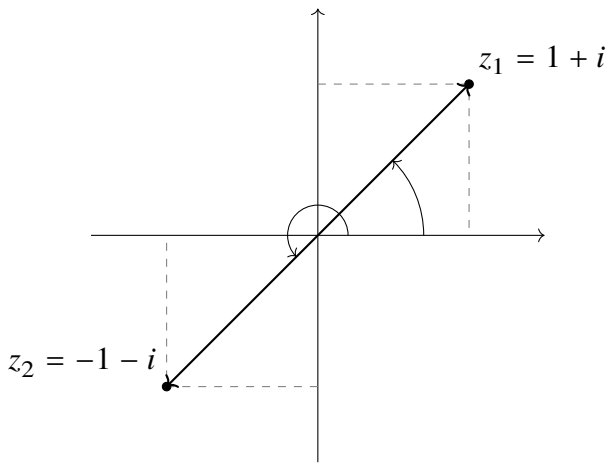
$$\begin{aligned} z = x + iy &= r \cdot \cos\theta + ir\sin\theta \\ &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= r \cdot e^{i\theta} \quad \text{(Euler)} \end{aligned}$$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ διότι

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right) \\ &= \cos\theta + i\sin\theta \end{aligned}$$

Επίσης:

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= \sqrt{x^2 + y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \\ &= r \cdot (\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= r\cos\theta + ir\sin\theta \end{aligned}$$



$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4}$$
$$r_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$\theta_1 = \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$$

$$z_2 = -1 - i = \sqrt{2}e^{i5\pi/4} = \sqrt{2}e^{i\cdot\left(-3\pi/4 = \sqrt{2}e^{i13\pi/4}\right)}$$
$$r_2 = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$
$$\theta_2 = \arctan \frac{-1}{-1} = \frac{\pi}{4}$$

Γενικά: $-1 - i = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)}, \quad k \in \mathbb{Z}$

5.1 Συναρτήσεις

$$\mathbb{C} \to \mathbb{R}$$

$$z = x + iy$$
$$\text{mod}(z) = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\text{Arg}(z) = \begin{cases} \theta_0 & \text{αν } z \in 1^{\text{ο}} \text{ τεταρτημόριο} \\ \pi - \theta_0 & \text{αν } z \in 2^{\text{ο}} \text{ τεταρτημόριο} \\ \pi + \theta_0 & \text{αν } z \in 3^{\text{ο}} \text{ τεταρτημόριο} \\ 2\pi - \theta_0 & \text{αν } z \in 4^{\text{ο}} \text{ τεταρτημόριο} \end{cases} \qquad \theta_0 = \arctan\left(\left|\frac{y}{x}\right|\right)$$
$$\forall z \in \mathbb{C} - \{0\} \ \text{Arg}(z) \in [0, 2\pi)$$

Ορίζω και την πλειότιμη συνάρτηση $\arg(z) = \{\text{Arg}(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

$$\begin{aligned} z = x + iy &= \text{mod}(z) \cdot e^{i\,\text{Arg}(z)} \\ &= \text{mod}(z) \cdot e^{i(\text{Arg}(z) + 2k\pi)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \text{mod}(z_1)e^{i\,\text{Arg}(z_1)} \\ z_2 &= \text{mod}(z_2)e^{i\,\text{Arg}(z_2)} \\ z_1 z_2 &= \text{mod}(z_1)\text{mod}(z_2)e^{i\cdot(\text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2))} \end{aligned}$$
$$\text{Arg}(z_1 z_2) \neq \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) \text{ επειδή}$$
$$\text{Arg}\left(e^{i\frac{7\pi}{4}} e^{i\frac{7\pi}{4}}\right) = \frac{7\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} - 2\pi$$

Γενικά, αν $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$, τότε:

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

Όμως:

$$\begin{aligned}\arg(z^2) &= \arg(z) + \arg(z)\\ &\neq 2\arg(z)\end{aligned}$$

διότι:

$$\begin{aligned}
&A = \{a_1, a_2, \dots\}\\
&B = \{b_1, b_2, \dots\}\\
&A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}\\
&A + A = \{a_1 + a_2 : a_1, a_2 \in A\}\\
&2A = \{2a : a \in A\}\\
&A = \{1, 2, 3\}\\
&B = \{4, 5\}\\
&A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\} = \{1 + 4, 1 + 5, 2 + 4, 2 + 5, 3 + 4, 3 + 5\} = \{5, 6, 7, 8\}\\
&A + A = \{2, 3, 4, 5, 6\}\\
&2A = \{2, 4, 6\}
\end{aligned}$$

5.2 n-οστές ρίζες

$$z = a^{1/n} \iff z^n = a$$

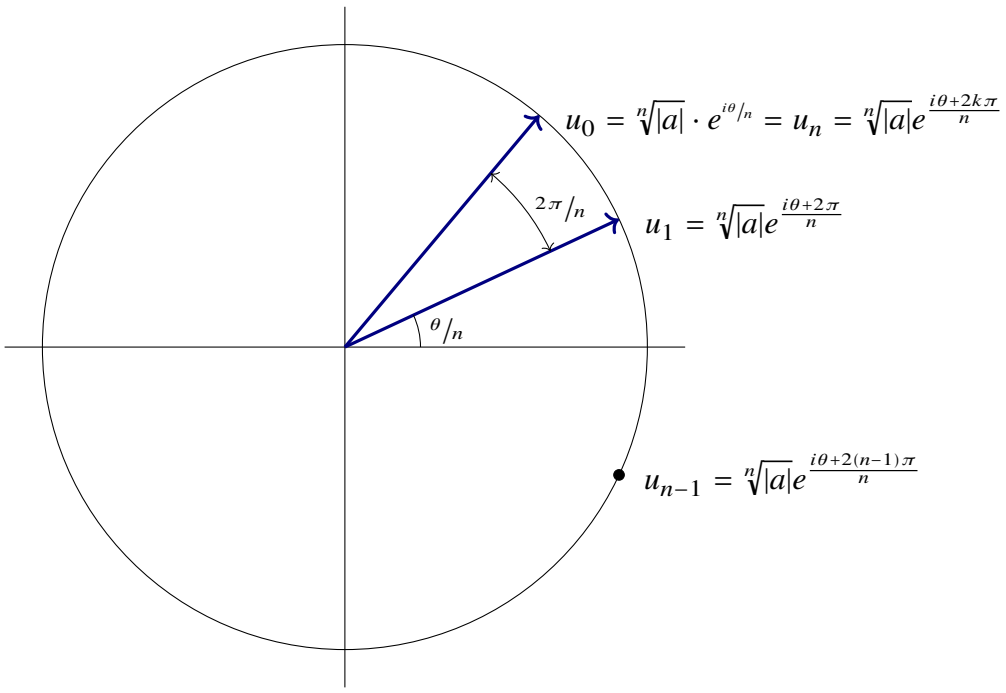
Δηλ. ποιο z ικανοποιεί αυτή

$$\begin{aligned}
&a = |a|e^{i\theta}\\
&z = re^{i\phi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(re^{i\phi}\right)^n = |a|e^{i\theta}\\
&\implies r^n \cdot e^{in\phi} = |a|e^{i\theta}\\
&\implies r^n \cdot (\cos n\phi + i \sin n\phi) = |a| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)\\
&\implies \left\{\begin{array}{l} r^n = |a| \implies r = \sqrt[n]{|a|} \\ \cos(n\phi) = \cos\theta \\ \sin(n\phi) = \sin\theta \implies \end{array}\right| \implies n\phi = \theta + 2k\pi \in \mathbb{Z} \implies \phi = \tfrac{\theta + 2k\pi}{n}\\
&\implies z = a^{1/n} = \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i(\theta + 2k\pi)/n} \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

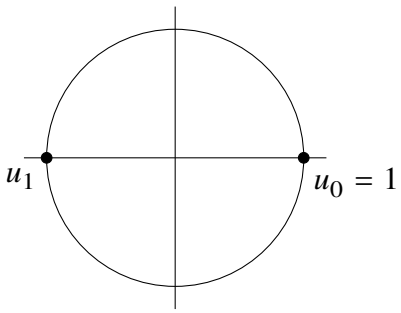
(Όμως αρκεί να πάρω $k \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$)

$$a^{1/n} = \left\{ \quad \sqrt[n]{|a|}e^{i\theta/n},\ \sqrt[n]{|a|}e^{\frac{i\theta + 2\pi}{n}}, \dots \right.$$



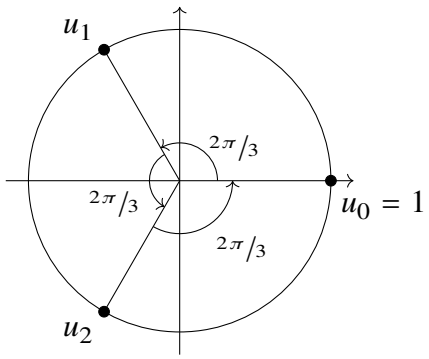
Пар. $a^{1/2} = 1^{1/2}$

$$a = 1 = 1 \cdot e^{i0} \quad |a| = 1, \theta = 0$$
$$u_0 = \sqrt[2]{1} \cdot e^{i\left(\frac{0+2\cdot 0\cdot \pi}{2}\right)} = e^{i0} = 1$$
$$u_1 = \sqrt[2]{1} \cdot e^{i\left(\frac{0+2\cdot \pi}{2}\right)} = e^{i\pi} = -1$$



Пар. $a^{1/3} = 1^{1/3} = z$

$$a = 1 = e^{i0}, |a| = 1, \theta = 0$$
$$u_0 = 1$$
$$u_1 = e^{i2\pi/3} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$
$$u_2 = e^{i4\pi/3} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$



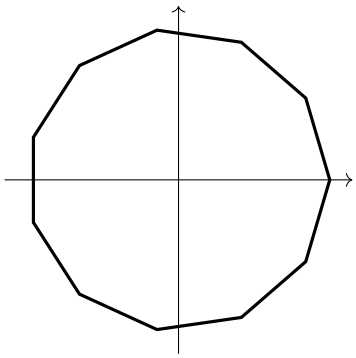
Διαφορετικά

$$
\begin{aligned}
& 1^{1/3} = z \iff 1 = z^3 \\
& \iff z^3 - 1 = 0 \\
& \iff (z-1)(z^2+z+1) = 0 \\
& \iff (z-1)\left(z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) = 0
\end{aligned}
$$

Παρ. $1^{1/11} = z \iff 1 = z^{11}$

$$
\begin{aligned}
& \iff z^{11} - 1 = 0 \\
& \iff (z-1)(z^{11} + z^{10} + \cdots + z^1 + 1) = 0
\end{aligned}
$$

$\{u_0, u_1, \ldots, u_{10}\}$



Κεφάλαιο 6 Βασικές μιγαδικές συναρτήσεις

$e^z,\ \log(z)$

6.1 Εκθετική συνάρτηση

$$e^z \overset{\text{ορισμός}}{=} e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Ήξερα $\begin{array}{l} e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ e^{iy} : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \end{array}$.

Τώρα η νέα συνάρτηση $e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ και **γενικεύει** τις δύο προηγούμενες συναρτήσεις.

Παρ.

$$\begin{aligned} e^{1+i} = ee^i &= e \cdot (\cos 1 + i \sin 1) \\ &= e \cdot \cos 1 + i \cdot e \cdot \sin 1 \\ \operatorname{Re}\left(e^{1+i}\right) &= e \cos 1 \\ \operatorname{Im}\left(e^{1+i}\right) &= e \sin 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log(e) &= 1 \\ \log(-1) &= \log\left(e^{i(\pi+2k\pi)}\right) = i(\pi + 2k\pi) \end{aligned}$$

Δηλ. η λογαριθμική συνάρτηση είναι **πλειότιμη**.

$$\begin{aligned} z &= |z|e^{i\theta} \\ \log(z) &= \ln(|z|) + i\theta \end{aligned}$$

Ορίζω

Την πλειότιμη λογαριθμική $\log(z) = \ln(|z|) + i\arg(z)$

Τη μονότιμη λογαριθμική $\operatorname{Log}(z) = \ln(|z|) + i\operatorname{Arg}(z)$ είναι ο πρωτεύων κλάδος της πλειότιμης

$$\begin{aligned} \log(1+i) &= \log\left(\sqrt{2}e^{i(\pi/4+2k\pi)}\right) \\ &= \log\left(\sqrt{2}\right) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln(2) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \end{aligned}$$

Από σήμερα: $\operatorname{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$

Πριν 7 ημέρες: $\cancel{e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + i \sin y}$

Σήμερα: $\exp(z) \overset{\text{ορ}}{=} 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

Θεώρημα

Η $\exp(z)$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $z \in \mathbb{C}$ και ικανοποιεί:

(1) $\forall z : (\exp(z))' = \exp(z)$

(2) $\forall z_1, z_2 : \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$

(3) $\forall \theta \in \mathbb{R} : \exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$

Απόδ.

(1)

$$\begin{aligned} (\exp(z))' &= \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right)' \\ &= 0 + 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots = \exp(z) \end{aligned}$$

(2) $g(z) = \exp(z)\exp(\zeta - z)$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z} = \exp(z)\exp(\zeta - z) + \exp(z)\exp(\zeta - z)(-1) = 0$$
$$\Longrightarrow \; g(z) = c \;\Longrightarrow\; c = g(0) = \exp(\zeta)$$
$$\Longrightarrow \; \exp(\zeta) = g(z) = \exp(z)\exp(\zeta - z)$$

Θέτω: $z = z_1,\ \zeta = z_1 + z_2$

Οπότε:

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\cdot\exp(z_2)$$

(3)

$$\begin{aligned}\exp(i\theta) &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + i\cdot\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots\right) \\ &= \cos\theta + i\sin\theta.\end{aligned}$$

$\exp(z) \quad e^z$

$$\exp(1+i) = 1 + (1+i) + \frac{(1+i)^2}{2!} + \dots$$
$$e^{1+i} = 1 + (i+1) + \dots$$

ή ο αρ. $e = 2.718$ υψωμένος στη μιγαδική δύναμη $1 + i$

Θεώρημα

Η $\exp(z)$ είναι περιοδική με περίοδο $2\pi i$

Απόδ.

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)\exp(2\pi i) = \exp(z)$$

Η εικόνα του συνόλου $A \subseteq \mathbb{C}$ υπό την συνάρτηση $f(z)$ Δηλ.

$$f(A) = \{w = f(z),\ z \in A\}$$

Παρ. Να δειχθεί ότι $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} - \{0\}$

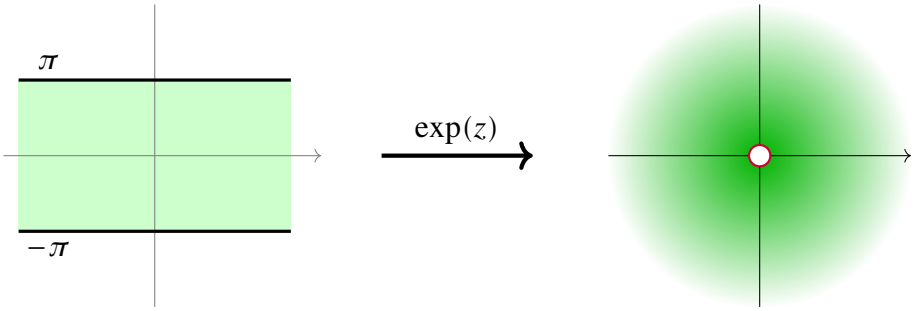
Διότι: έστω $w = re^{i\phi} \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Θα βρω $z = \rho e^{i\theta} = x + iy$ τ.ώ: $\exp(z) = w$.

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = \exp(x)\exp(iy)$$
$$w = re^{i\phi}$$
$$\exp(x) = |\exp(z)| = |w| = r \;\Longrightarrow\; \boxed{x = \ln(r)}$$
$$\mathrm{Arg}\,(\exp(z)) = \mathrm{Arg}(w)$$
$$\mathrm{Arg}\,(\exp(z)) = \mathrm{Arg}\,(\exp(x)\exp(iy)) = y$$
$$\mathrm{Arg}(w) = \mathrm{Arg}(re^{i\phi}) = \phi$$
$$\mathrm{Arg}\,(\exp(z)) = \mathrm{Arg}(w) \;\Longrightarrow\; \boxed{y = \phi}$$

Τελικά $z = x + iy = \ln(r) + i\phi$ ικανοποιεί $\exp(z) = re^{i\phi} = w$. Άρα $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} - \{0\}$
Στην πραγματικότητα, δεν χρειάζομαι όλο το $\mathbb{C}$ ως πεδίο ορισμού διότι:

$$\exp(U) = \mathbb{C} - \{0\}, \quad \text{όπου } U = \{x + iy : x \in \mathbb{R},\ y \in (-\pi, \pi]\}$$



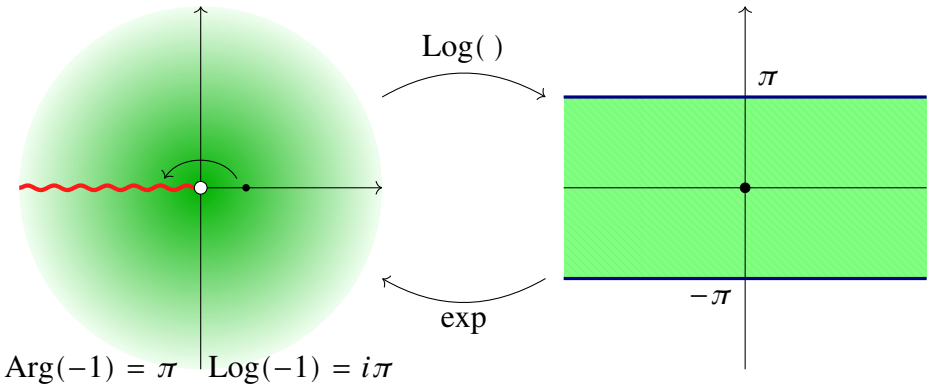
6.2 Λογαριθμική Συνάρτηση

$$w = \overbrace{\log(z)}^{\text{πλειότιμη}} \iff z = \exp(w)$$

$$\begin{aligned}
w &= \log(1+i) \\
1+i &= \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)} \\
\log(1+i) &= \log\left(\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}\right) \\
&= \ln(\sqrt{2}) + \log\left(e^{i\left[\frac{\pi}{4}+2k\pi\right]}\right) \\
&= \ln(\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \quad k \in \mathbb{Z} \\
&= \left\{\ldots, \ln(\sqrt{2}) - i\frac{7\pi}{4}, \ln(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4}, \ln(\sqrt{2}) + i\frac{3\pi}{4}, \ln(\sqrt{2}) - i\frac{17\pi}{4}, \ldots\right\}
\end{aligned}$$

$\boxed{\log(z) = \ln(r) + i\arg(z)}$ ← πλειότιμη

$\boxed{\mathrm{Log}(z) = \ln(r) + i\,\mathrm{Arg}(z)}$ ← μονότιμη
ασυνεχής για $x \in (-\infty, 0]$



6.3 Μιγαδικές δυνάμεις

$$z^c = e^{\log(z^c)} = e^{c\log z} = e^{c(\ln(|z|)+i\arg(z))}$$

ή

$$z^c = e^{\mathrm{Log}(z^c)} = e^{c(\ln(|z|)+i\mathrm{Arg}(z))}$$

$$\underbrace{(1+i)^{2-i}}_{\substack{z=1+i \\ c=2-i}} = e^{(2-i)\log(1+i)} = e^{(2-i)\left(\ln\left(\sqrt{2}\right)+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\left(2\ln\left(\sqrt{2}\right)+\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)+i\left(-\ln\left(\sqrt{2}\right)+\frac{\pi}{2}+4k\pi\right)} \\
&= e^{2\ln\left(\sqrt{2}\right)+\frac{\pi}{4}+2k\pi} \cdot e^{i\left(-\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{2}+4k\pi\right)} \\
&= 2e^{\pi/4+2k\pi} \cdot \left[\cos\left(-\ln\left(\sqrt{2}\right)+\frac{\pi}{2}+\cancel{4k\pi}\right)+i\sin\left(-\ln\left(\sqrt{2}\right)+\frac{\pi}{2}+\cancel{4k\pi}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+i} = (1+i)^{1/2} &= e^{1/2\cdot\log(1+i)} \\
&= e^{1/2\left(\ln\left(\sqrt{2}\right)+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)} \\
&= e^{1/2\ln\left(\sqrt{2}\right)} \cdot e^{\frac{1}{2}(\pi/4+2k\pi)} \\
&= \sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{8}+k\pi\right)} \\
&= \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}+k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}+k\pi\right)\right) \\
&= \begin{cases} \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) \\ \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right)\right) \end{cases}
\end{aligned}$$

$$(-1)^i = e^{\log\left((-1)^i\right)} = e^{i\log(-1)} = e^{i(i(2k+1)\pi)} = e^{-(2k+1)\pi}$$

$$\begin{aligned}
(1+i)^{\sqrt{2}} &= e^{\sqrt{2}\log(1+i)} = e^{\sqrt{2}\left(\ln\left(\sqrt{2}\right)+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)} \\
&= \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \cdot e^{i\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)+2k\pi} \\
&= \sqrt{2}^{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{4}+2k\sqrt{2}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{4}+2k\sqrt{2}\pi\right)\right] \\
&\cos\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{4}+2k\sqrt{2}\pi\right) \\
&\Longrightarrow \frac{\sqrt{2}\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}+2k\sqrt{2}\pi+2m\pi \Longrightarrow 2k\sqrt{2}\pi = 2m\pi \Longrightarrow \sqrt{2} = {}^{m}/_{k}
\end{aligned}$$

$$(1+i)^{p/q} = \ldots$$
$$m = \lambda q$$

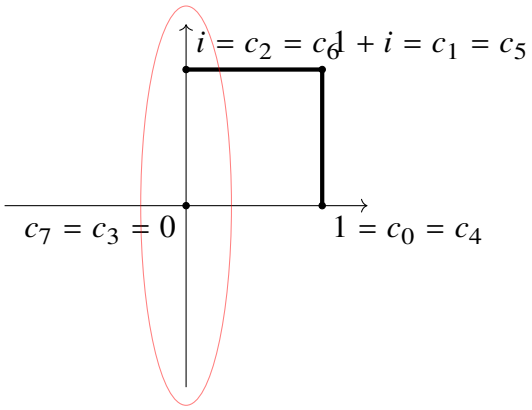
Παρ. Να βρεθούν οι τιμές του n τ.ώ:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} i^k \in \mathbb{I}$$

n	
0	1
1	$1+i$
2	$1+i+i^2 = i$
3	$1+i+i^2+i^3 = 0$
4	1
5	$1+i$
6	i
$\vdots$	$\vdots$

Αρα $\forall_{n,m} : c_n = c_{n+4m}$
Οι φανταστικές τιμές του c_n προκύπτουν για

$$\begin{aligned} n =& 2, 3, \\ & 6, 7, \\ & 10, 11, \end{aligned}$$



Απ. $n \in \{m + 4l : m \in \{2, 3\}, l \in \mathbb{N}_0\}$

Παρ. Να λυθεί η $(1+z)^{2n} = -(1-z)^{2n} \quad n \in \mathbb{N}$

Λύση Φαίνεται άμεσα ότι $z \neq 1$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2n} &= -1 \implies \\
\frac{1+z}{1-z} &= (-1)^{1/2n} = \left(e^{i(2k+1)\pi}\right)^{1/2n} \\
z &= \frac{e^{i(2k+1)\pi/2n} - 1}{e^{i(2k+1)\pi/2n} + 1} \\
&= \frac{\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) + i\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) - 1}{\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) + i\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) + 1} \\
&\underset{\substack{\cos\phi - 1 = -2\sin^2\frac{\phi}{2} \\ \cos\phi + 1 = 2\cos^2\frac{\phi}{2}}}{=} -\frac{2\sin^2\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) + i2\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right)\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4}\right)}{2\cos^2\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) + i2\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right)\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4}\right)} \\
&= \frac{\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right)\left[-\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) + i\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right)\right]}{\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right)\left[\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) + i\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right)\right]} \\
z_k &= i\tan\left((2k+1)\frac{\pi}{4n}\right) \qquad k = 0, 1, \ldots, 2n-1
\end{aligned}
$$

6.4 Μετασχηματισμοί & Απεικονίσεις

6.4.1 Η γραμμική απεικόνιση

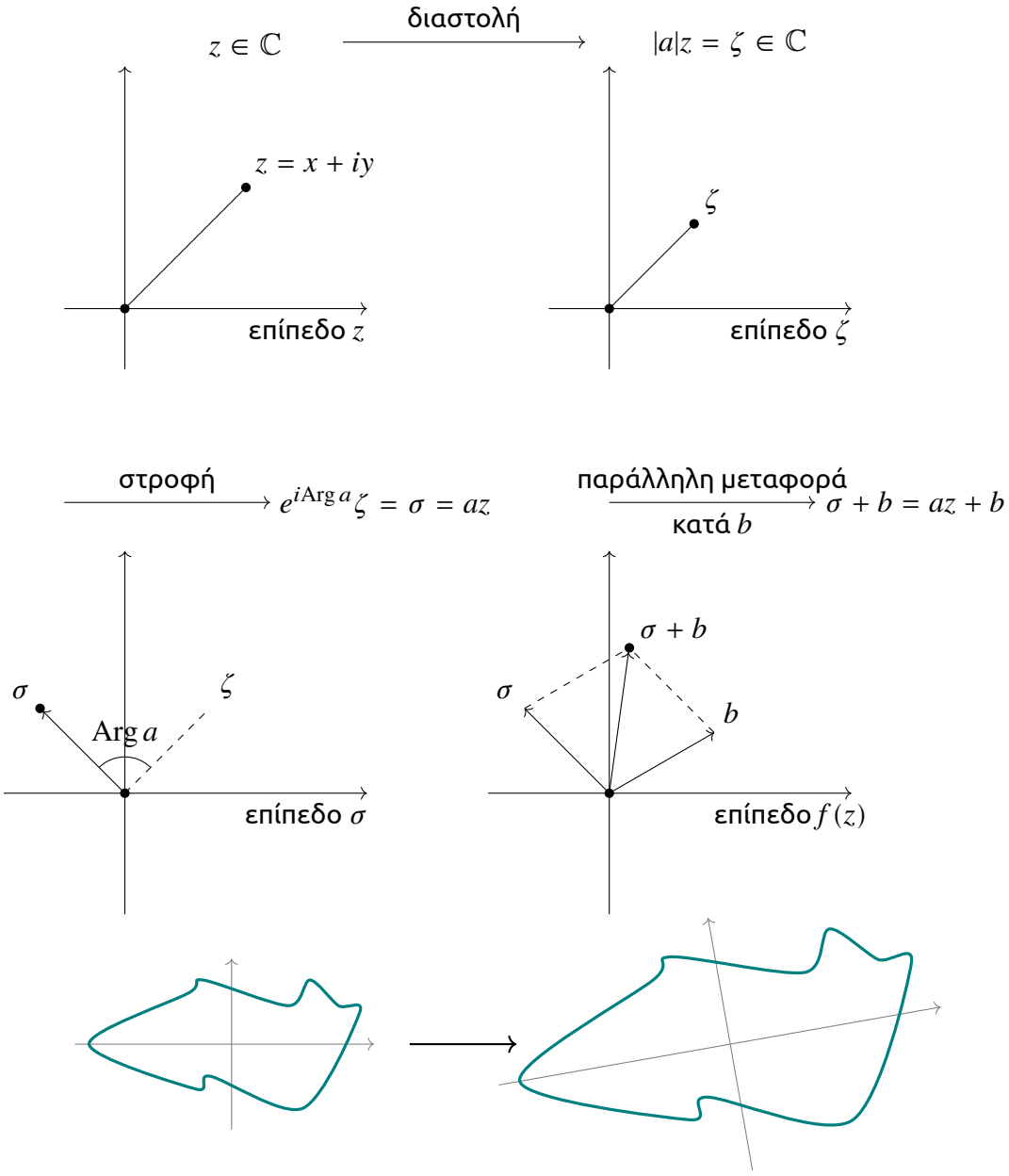
Τύπος: $f(z) = az + b, \quad a, b \in \mathbb{C}$

Προφανώς η $w = f(z) = az + b$ είναι 1-1 συνάρτηση και εύκολα βρίσκουμε την αντίστροφή της λύνοντας την $w = az + b$ ως προς z.

Έτσι: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : f(z) = az + b$ και μπορώ να την επεκτείνω στο $\bar{\mathbb{C}}$ με 1-1 τρόπο θέτοντας

$$f(\infty) = \infty$$

Γεωμετρική ερμηνεία



- Προφανώς, από τη δομή της, η γραμμική απεικόνιση απεικονίζει ευθείες σε ευθείες και κύκλους σε κύκλους.

Ερώτηση Έστω $f(z) = az + b$.
Αν $Ax + By + \Gamma = 0$ ευθεία τυχαία, βρείτε πού αυτή απεικονίζεται μέσω της $f(z)$.

$$\begin{aligned} w &= u + iv = az + b \\ &= u(x,y) + iv(x,y) = a(x+iy) + b \end{aligned}$$

- $w = az + b \iff z = \frac{w-b}{a} \iff x + iy = \frac{u+iv-(b_0+ib_1)}{a_0+ia_1} = \frac{[(u-b_0)+i(v-b_1)][a_0-a_1 i]}{|a|^2} = \frac{(u-b_0)a_0+a_1(v+b_1)}{|a|^2} + i\frac{-a_1(u-b_0)+a_0(v-b_1)}{|a|^2}$

Άρα:

$$x = \frac{a_0 u + a_1 v - (a_0 b_0 + a_1 b_1)}{|a|^2}$$
$$y = \frac{-a_1 u + a_0 v - (a_1 b_0 + a_0 b_1)}{|a|^2}$$

(μπορεί να είναι λάθος)

$$\begin{aligned} & Ax + By + \Gamma = 0 \\ \iff & A\left(a_0 u + a_1 v - (a_0 b_0) - (a_0 b_0 + a_1 b_1)\right) + B\left(-a_1 u + a_0 v - (a_1 b_0 + a_0 b_1)\right) + \Gamma |a|^2 = 0 \end{aligned}$$

6.4.2 Αντιστροφή $f(z) = \frac{1}{z} \quad (z \neq 0)$

Προφανώς: $\mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C} : f(z) = \frac{1}{z}$
και μορεί να επεκταθεί στο $\bar{\mathbb{C}}$ θέτοντας $f(0) = \infty$ και $f(\infty) = 0$.

Εννοείται ότι είναι 1-1 με $w = \frac{1}{z} \iff \frac{1}{w}$ δηλ. για $\begin{cases} w = u + iv \\ z = x + iy \end{cases}$ έχουμε:

$$x + iy = \frac{u - iv}{u^2 + v^2} \iff \left| \begin{array}{l} x = \frac{u}{u^2+v^2} \\ y = \frac{-v}{u^2+v^2} \end{array} \right. \tag{2}$$

Έτσι φαίνεται ότι η συνάρτηση αυτή απεικονίζει ευθείες σε ευθείες ή κύκλους, και κύκλους σε ευθείες ή κύκλους.

Πράγματι, αν $Ax + By + \Gamma = 0$ τυχαία ευθεία στο επίπεδο του z, τότε από (2):

$$\begin{aligned} & A\frac{u}{u^2 + v^2} - B\frac{v}{u^2 + v^2} + \Gamma = 0 \\ \iff & \boxed{Au - Bv + \Gamma\left(u^2 + v^2\right) = 0} \end{aligned}$$

- $\underline{\Gamma = 0}$ τότε $Au - By = 0$ άρα ευθεία απεικον. σε ευθεία, ενώ:
- $\underline{\Gamma \neq 0}$ τότε $u^2 + v^2 + \frac{A}{\Gamma}u - \frac{B}{\Gamma}v = 0$ **δηλ.** κύκλος

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

Η $f(z) = \frac{1}{z}$ απεικονίζει το εσωτερικό μοναδιαίου κύκλου $|z| = 1$ με κέντρο το $z = 0$, στο εξωτερικό του (με 1-1 τρόπο, και αντιστρόφως).

Πράγματι:

$$\begin{aligned} & z : |z| < 1, \text{ τότε } f(z) = \frac{1}{z} \text{ με } |f(z)| = \frac{1}{|z|} > 1 \implies |f(z)| > 1 \\ & z : |z| > 1, \text{ τότε } f(z) = \frac{1}{z} \text{ με } |f(z)| = \frac{1}{|z|} < 1 \implies |f(z)| < 1 \\ & z : |z| = 1, \text{ τότε } f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \bar{z} \end{aligned}$$

6.4.3 Μετασχ. Möbius

Καλούμε ρητογραμμικό μετασχηματισμό (Möbius) κάθε συνάρτηση

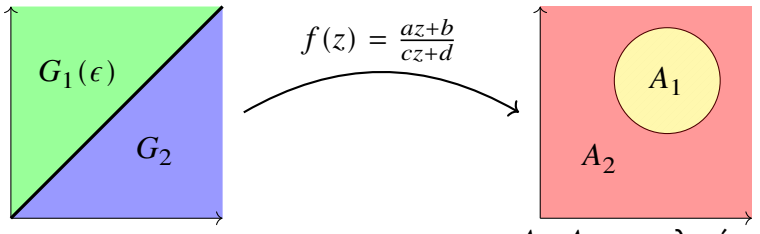
$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (\text{με } ad - bc \neq 0)$$

Προφανώς: $f : \mathbb{C} - \{-{}^{d}/_{c}\} \to \mathbb{C} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$, αν $c \neq 0$
ή $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ αν $c = 0$

Η f είναι 1-1 (εύκολο).

- Αποδεικνύεται ότι ο μετασχ. Möbius είναι σύνθεση <u>διαστολής</u>, <u>περιστροφής</u>, <u>μετάθεσης</u> και <u>αντιστροφής</u>, άρα απεικονίζει ευθείες σε ευθείες ή κύκλους, και κύκλους σε ευθείες ή κύκλους.
- Ο μετασχ. Möbius (στην περίπτωση ευθείας ή κύκλου) απεικονίζει συμπληρωματικούς τόπους σε συμπληρωματικούς τόπους.

π.χ.



G_1, G_2 συμπληρωματικοί τόποι
επειδή η συρραφή τους
απεικονίζει όλο το επίπεδο

A_1, A_2 συμπλ. τόποι

Τότε $G_1 \to A_1$ ή A_2
$G_2 \to A_2$ ή A_1

- Αποδεικνύεται ότι υπάρχει ΜΟΝΑΔΙΚΟΣ μετασχ. Möbius που απεικονίζει ΤΡΙΑ σημεία z_1, z_2, z_3 σε ΤΡΙΑ ΑΛΛΑ σημεία $w_1 = f(z_1),\ w_2 = f(z_2),\ w_3 = f(z_3)$, και έχει τη μορφή:

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}.$$

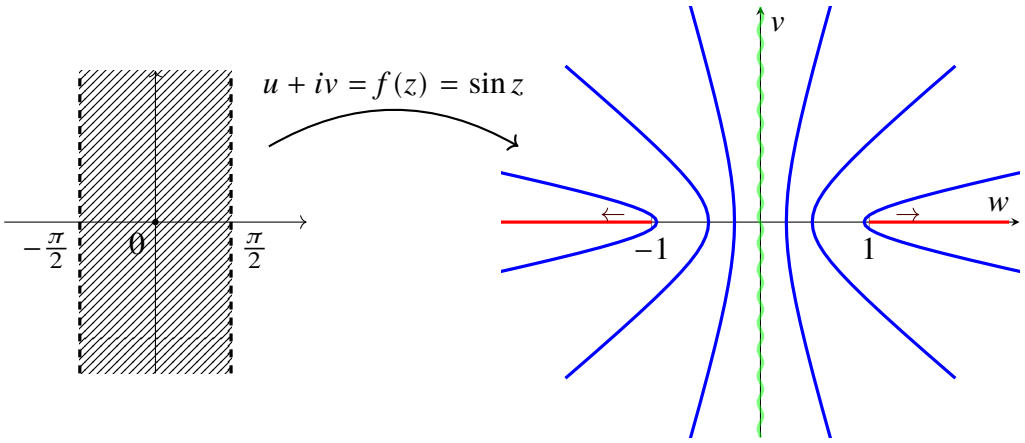
6.5 Τριγωνομετρικές και αντίστροφές τους

- Η συνάρτηση

$$\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

είναι 2π-περιοδική, άρα μη αντιστρέψιμη στο $\mathbb{C}$

Έστω $E_k = \left\{x + iy : \kappa\pi - \frac{\pi}{2} < x < \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, y \in \mathbb{R}\right\}, k \in \mathbb{Z}$ είναι "κατακόρυφες λωρίδες".
Για $k = 0$, έχω:



Τότε η $\sin z$ γίνεται 1-1 με πεδίο τιμών το σύνολο

$$A = \mathbb{C} - \{u + iv : |u| \geq 1 \text{ και } v = 0\}$$

Έτσι η $\sin : E_k \to A$ είναι 1-1 (για κάθε συγκεκριμένο $k \in \mathbb{Z}$), άρα αντιστρέψιμη.

- Από $w = \sin z$ παίρνω:

$$\left| \begin{array}{l} u(x,y) = \sin x \cosh y \\ v(x,y) = \cos x \sinh y \end{array} \right.$$

- Για $x = \frac{\pi}{2}$, $y \in \mathbb{R} \xrightarrow[\text{απεικονίζεται}]{\sin z} (\cosh y, 0)$

  Αλλά $\cosh y$ δεν είναι 1-1 $\forall y$, επομένως η $\sin z$ ΔΕΝ μπορεί να είναι 1-1 πάνω στην $x = \frac{\pi}{2}$, η οποία εξαιρείται από το πεδίο ορισμού. Έτσι, από το πεδίο τιμών, εξαιρείται η ημιευθεία

$$\{u + iv : u \geq 1,\ v = 0\}$$

- Για $x = -\frac{\pi}{2}$, ομοίως εξαιρείται η ημιευθεία

$$\{u + iv : u \leq 1,\ v = 0\}$$

- Για $\underline{x = 0}$, $y \in \mathbb{R} \xrightarrow[\text{απεικον.}]{\sin z} (0, \sinh y)$ και επειδή $\sinh y$ 1-1 γν. αύξ. με πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$ $\forall y$ η $x = 0$ απειον. στην $u = 0$.
- Έστω $x = a \quad (a \neq \pm\frac{\pi}{2}),\ a \neq 0$.

  Τότε: $\left| \begin{array}{l} u = \sin a \cosh y \\ v = \cos a \sinh y \end{array} \right. \implies \boxed{\frac{u^2}{\sin^2 a} - \frac{v^2}{\cos^2 a} = 1}$. Αν $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, τότε $\left| \begin{array}{l} u > 0 \\ v \in \mathbb{R} \end{array} \right.$, και αντίστοιχα για $a \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

  Έτσι ορίζουμε:

$$\text{τοξημ} = \arcsin : E' \to E_k :$$

$$\arcsin z = w \iff z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2}$$

$$\iff e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0 \iff e^{iw} = \frac{2iz + \sqrt{4 - 4z^2}}{2}$$

$$\implies iw = \log\left(z + \frac{2}{\sqrt{1 - z^2}}\right)$$

$$\implies \boxed{\arcsin z = \log\left(z + \frac{2}{\sqrt{1 - z^2}}\right)}$$

Κεφάλαιο 7 Ακολουθίες & Σειρές (Μιγαδικών αριθμών/συναρτήσεων)

Ορισμός

Ακολουθία $(u_n(z))_{n=1}^{\infty}$

Ορισμός

Λέμε ότι η $u_n(z)$ τείνει σε $u(z)$.
Γράφουμε $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(z) = u(z)$

$$\forall z, \forall \epsilon > 0\ \exists N_{\epsilon,z} : n \geq N\epsilon, z \implies |u_n(z) - u(z)| < \epsilon$$

Παρ. $u_n(z) = 1 + \frac{z}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} = 1$ διότι

$$\begin{aligned}
\forall z \in \mathbb{C}, \forall \epsilon > 0 : n \geq \frac{|z|}{\epsilon} + 1 \implies & \left|\underbrace{1 + \frac{z}{n} - 1}\right| < \epsilon \\
\iff & \left|\frac{z}{n}\right| < \epsilon \\
\iff & n > \frac{|z|}{\epsilon}
\end{aligned}$$

Ορισμός

Έστω ακολουθία $(u_n(z))_{n=1}^{\infty}$

Ορίζω νέα ακολουθία $(S_1(z))_{n=1}^{\infty}$ ως εξής:
$$\begin{aligned}
S_1(z) &= u_1(z) \\
S_2(z) &= u_1(z) + u_2(z) \\
&\dots \\
S_n(z) &= u_1(z) + u_2(z) + \dots + u_n(z)
\end{aligned}$$

Εάν $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n(z) = S(z)$ γράφω $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z) = S(z)$ και το ονομάζω **σειρά**.

Παρ. για $n \in \mathbb{N}$ ορίζω $u_n(z) = z^n \cdot (1 - z)$. Τότε

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} z^n(1 - z) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(z^n - z^{n+1}\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(z - z^2 + z^2 - z^3 + z^3 - z^4 + \dots - z^{N+1}\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(z - z^{N+1}\right) = z - \lim_{N\to\infty} z^{N+1} \\
&\overset{\text{Θέτω } z=re^{i\theta}}{=} z - \lim_{N\to\infty} r^N e^{iN\theta} \\
&= z \text{ όταν } |z| < 1
\end{aligned}$$

Τελικά

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \cdot (1 - z) = \begin{cases} z & \text{όταν } |z| < 1 \\ \text{δεν ορίζεται} & \text{όταν } |z| \geq 1 \end{cases}$$

(Για $z = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} = 0^n(1 - z) = 0 = z$)
Ισχύει $|z| < 1 \implies \lim\limits_{N\to\infty} z^N = 0$, διότι

$$\begin{aligned}
\forall z \text{ με } |z| < 1, \epsilon > 0 \quad n \geq \frac{\ln e}{\ln |z|} + 1 \implies & |z^n| < \epsilon \\
\iff & |z|^n < \epsilon \\
\iff & n \cdot \ln |z| < \ln e \\
\iff & n < \frac{\ln e}{\ln |z|}
\end{aligned}$$

Ορισμός

Λέω ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ **συγκλίνει απολύτως** αν $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ συγκλίνει.

Ορισμός

Λέμε ότι η $(u_n(z))_{n=1}^{\infty}$ **συγκλίνει ομοιόμορφα** στην $u(z)$ αν

$$\forall z, \forall \epsilon > 0 \exists \underbrace{N_\epsilon}_{\text{Το } N_e \text{ δεν εξαρτάται από το } z} : \quad n \geq N_\epsilon \implies |u_n(z) - u(z)| < \epsilon$$

Παρόμοια πράγματα λέμε και για την $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)}$

Παρ. Η $\sum_{n=1}^{\infty} z^n \cdot (1-z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα για κάθε z με $|z| \leq \frac{1}{z}$

Διότι

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} z^n(1-z) = z - \lim_{N\to\infty} z^{N+1}$$

$\to$ Αρκεί να δείξω ότι $z^{N+1} \to 0$ ομοιόμορφα.

$$\forall z, |z| \leq \frac{1}{2}, \forall \epsilon > 0, \forall n \geq \frac{\ln \epsilon}{\ln |z|} + 1 \implies \left|z^{N+1}\right| < \epsilon$$

Ισχυρίζομαι ότι

$$\forall z, |z| \leq \frac{1}{z}, \forall \epsilon > 0, \forall n \geq \frac{\ln \epsilon}{\ln \frac{1}{2}} + 1 \implies \left|z^{N+1}\right| < \epsilon$$

διότι $|z| \leq \dfrac{1}{2} \implies \dfrac{\ln \epsilon}{\ln \frac{1}{2}} \geq \dfrac{\ln \epsilon}{\ln |z|}$

Θεώρημα

Έστω $(u_n(z))_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων και $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = u(z)$ ομοιόμορφα στο χωρίο Δ.

Τότε $\int_c u(z)\,\mathrm{d}z = \int_c \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c u_n(z)\,\mathrm{d}z$

Θεώρημα

Θέτω $(u_n(z))_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία αναλυτικών (ολόμορφων) συναρτήσεων και $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = u(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο χωρίο D. Τότε

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\sum u_n(z)\right) = \sum_{u=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}$$

Θεώρημα

Αν συγκλίνει η $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$, τότε συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$
Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.

Θεώρημα

Αν συγκλίνει η $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n(z)|$ και $\forall n, z : |u_n(z)| \leq |v_n(z)|$, τότε συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$

Θεώρημα: Κριτήριο του λόγου

Έστω $L(z) = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right|$. Τότε

$L(z) < 1$ η $\sum_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει
$L(z) > 1$ η $\sum_{n=1}^{\infty}$ δεν συγκλίνει
$L(z) = 1$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε

Θεώρημα: Κριτήριο της ρίζας

Έστω $L(z) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(z)|}$.. Τότε

$L(z) < 1$ η $\sum_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει
$L(z) > 1$ η $\sum_{n=1}^{\infty}$ δεν συγκλίνει
$L(z) = 1$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε

Παρ. Η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n\cdot(n+1)}$ συγκλίνει όταν $|z| \leq 1$, δεν συγκλίνει όταν $|z| > 1$

Θέτω $L(z) = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{z^{n+1}/(n+1)(n+2)}{z^n/n(n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty} |z|\frac{n}{n+2} = |z|$

Όταν $|z| = 1$, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z^n}{n(n+1)}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Αφού συγκλίνει απολύτως, συγκλίνει (για κάθε $z : |z| = 1$)

Παρ. $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ συγκλίνει όταν $|z| < 1$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} z^n &= z + z^2 + z^3 + \cdots + z^N \\ &= z \cdot (1 + z + z^2 + \cdots + z^{N-1}) \\ &= z \cdot \frac{1 - z^N}{1 - z} = \frac{z}{1 - z}\left(1 - z^N\right) \\ &= \frac{z}{1 - z} \text{ για } N \to \infty \text{ όταν } |z| < 1\end{aligned}$$

Για $|z| > 1$ δεν συγκλίνει.
Για $|z| = 1$ δεν συγκλίνει (τουλάχιστον για κάποιες τιμές).
Εναλλακτικά, με κριτήριο ρίζας: $L(z) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z^n|} = |z|$
και κριτήριο λόγου: $L(z) = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{z^{n+1}}{z^n}\right| = |z|$

Παρ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{(n+1)^3 4^n}$

$$L(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(z+2)^{n+1}}{(n+2)^3 4^{n+1}}}{\frac{(z+2)^n}{(n+1)^3 4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z+2|}{4}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^3 = \frac{|z+2|}{4} \to \begin{cases} |z+2| < 4 & \text{συγκλίνει} \\ |z+2| = 4 & * \\ |z+2| > 4 & \text{δεν συγκλίνει} \end{cases}$$

Αν $|z + 2| = 4$, ελέγχουμε αν συγκλίνει απολύτως:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(z+2)^n}{(n+1)^3 4^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty$$

Παρ. $\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$

$$L(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!|z|^{n+1}}{n!|z|^n} = \lim_{n\to\infty} (n+1)|z| = \begin{cases} \infty & |z| \neq 0 \\ 0 & |z| = 0 \end{cases}$$

- $\sum \frac{z^n}{n(n+1)}$ συγκλίνει για $|z| \leq 1$
- $\sum z^n$ συγκλίνει για $|z| \leq 1$
- $\sum \frac{(z+2)^n}{(n+1)^3 4^n}$ συγκλίνει για $|z + 2| \leq 4$
- $\sum n! z^n$ συγκλίνει για $|z| = 0$

7.1 Δυναμοσειρές & Σειρές Laurent

Ορισμός

Δυναμοσειρά: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$

Θεώρημα

Για κάθε δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ υπάρχει $R \geq 0$, τ.ώ:

$|z - z_0| < R$ η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα
$|z - z_0| > R$ η δυναμοσειρά δεν συγκλίνει

Στο $|z - z_0| = R$ η ΔΣ μπορεί να συγκλίνει σε κάποια σημεία και να μην συγκλίνει σε άλλα. Αυτό παρατηρούμε και στα 4 παραπάνω παραδείγματα.

Όταν $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \to$ σειρά Taylor.

Όταν $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \to$ σειρά Laurent.

Η σειρά Laurent περιλαμβάνει την Taylor ως ειδική περίπτωση.

Αν είναι "γνήσια" σειρά Laurent ($a_n \neq 0$ για κάποια αρνητικά n), τότε το z_0 λέγεται ανώμαλο σημείο της σειράς Laurent.

Θεώρημα

Για κάθε ΔΣ $f(z) = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n}$ υπάρχει αριθμός $R \geq 0$ (ακτίνα σύγκλισης) **τ.ώ**

(α) Η ΔΣ συγκλίνει ομοιόμορφα και απόλυτα στο $\underbrace{D_R}_{\text{δίσκος σύγκλισης}}(z_0) = \{z : |z - z_0| < R\}$

(β) Η ΔΣ αποκλίνει στο $\{z : |z - z_0| > R\}$

(γ) Σε κάθε σημείο του συνόρου του δίσκου σύγκλισης $\{z : |z - z_0| = R\}$ η ΔΣ μπορεί να συγκλίνει ή να αποκλίνει

Θεώρημα

Για κάθε ΔΣ $f(z) = \sum_{n=0} a_n (z - z_0)^n$, $\forall z \in D_R(z_0)$ ισχύουν:

(α)

$$\frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} z} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (z - z_0)^{n-1}$$

(β) Για κάθε $C \subseteq D_R(z_0)$

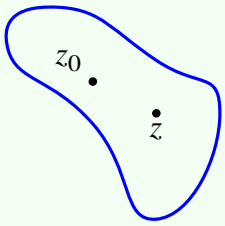
$$\int_C f(z)\, \mathrm{d} z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C (z - z_0)^n \, \mathrm{d} z$$

Θεώρημα

Έστω $f(z)$ αναλυτική στο εσωτερικό κλειστής καμπύλης C. Έστω $z_0,\ z$ σημεία στο εσωτερικό της C. Τότε

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!}(z-z_0)^n}$$

$$\boxed{= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\left(\oint_{C'} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n-1}}\,\mathrm{d}z\right)(z-z_0)^n}$$



ΠΑΡ. Να βρεθεί η σειρά Taylor της $f(z) = \sin z$, γύρω από το $z_0 = 0$.

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} f(z) &= \sin(z) & f(0) &= 0 \\ f'(z) &= \cos(z) & f'(0) &= 1 \\ f''(z) &= -\sin(z) & f''(0) &= 0 \\ f'''(z) &= -\cos(z) & f'''(0) &= -1 \end{aligned}$$

$$\sin(z) = 0(z-\cancelto{0}{z_0})^0 + \frac{1}{1!}(z-\cancelto{0}{z_0})^1 + \frac{0}{2!}(z-\cancelto{0}{z_0})^2 + \frac{1}{3!}(z-\cancelto{0}{z_0})^3 + \dots$$

$$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

ΠΑΡ. Να βρεθεί η σειρά Taylor του $\sin z$ γύρω από το $z_0 = \pi/3$

Α' τρόπος

$$f\,(\pi/3) = \sqrt{3}/2 \qquad ,f''\,(\pi/3) = -\sqrt{3}/2$$
$$f'\,(\pi/3) = 1/2 \qquad ,f'''\,(\pi/3) = -1/2, \dots$$

$$\sin(z) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}(z-\pi/3) - \frac{\sqrt{3}}{2\cdot 2!}(z-\pi/3)^2 - \frac{1}{2\cdot 3!}(z-\pi/3)^3$$

Β' τρόπος $u = z - \pi/3 \implies z = u + \pi/3$

$$
\begin{aligned}
\sin(z) = \sin(u + {}^{\pi}/_{3}) &= \sinh \cancelto{{}^{1}/_{2}}{\cos \frac{\pi}{3}} + \cosh \cancelto{{}^{\sqrt{3}}/_{2}}{\sin {}^{\pi}/_{3}} \\
&= \frac{1}{2}\left(u - {}^{u^3}/_{3!} + {}^{u^5}/_{5!} - \dots\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \dots\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}u - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 2!}u^2 - \frac{1}{2 \cdot 3!}u^3 + \dots \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(z - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 2!}\left(z - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \dots
\end{aligned}
$$

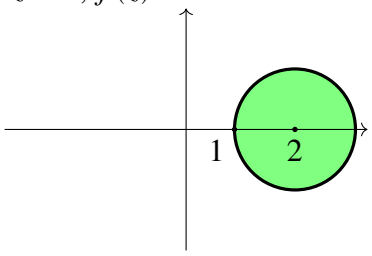
ΠΑΡ. Να βρεθεί η σειρά Taylor της $f(z) = \frac{1}{1-z}$ γύρω από το $z_0 = 2$

ΛΥΣΗ

$$
\begin{aligned}
&z - 2 = u \\
&z - 1 = u + 1 \\
&1 - z = -(1 + u) \\
&\qquad \forall u : |u| < 1 : \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \dots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-z} &= -\frac{1}{1+u} = -1 + u - u^2 + u^3 - \dots \\
|z-2| < 1 : \frac{1}{1-z} &= -1 + (z-2) - (z-2)^2 + (z-2)^3
\end{aligned}
$$

(για $z = 3$, $f(z) = -1 + 1 - 1 + 1 - \dots$)



ΠΑΡ. Να βρεθεί η σειρά Taylor της $f(z) = \frac{z}{z^2-2z-3}$ γύρω από το $z_0 = 0$

$$
\begin{aligned}
\frac{z}{z^2 - 2z - 3} &= \frac{A}{z-3} + \frac{B}{z-1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{z+1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{z-3} \\
&= \frac{1}{4} \cdot (1 - z + z^2 - z^3 + \dots) - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{3}} \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left(1 - z + z^3 - z^3 + \dots\right) - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{9} + \dots\right) \\
&= -\frac{1}{3}z + \frac{8}{36}z^2 + \dots
\end{aligned}
$$

$|z| < 1 \quad \left|\frac{z}{3}\right| < 1 \implies |z| < 3$

$$\frac{1}{z^2-2z-3} = \frac{1}{(z-1)^2-4} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{z-1}{z}\right)^2}$$
$$= -\frac{1}{4}\cdot\left(1+\left(\frac{z-1}{2}\right)^2+\left(\frac{z-1}{2}\right)-\left(\frac{z-1}{2}\right)^6+\dots\right)$$

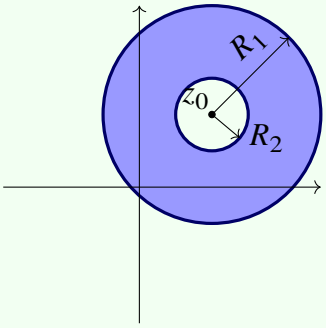
$$|z-1|<2: \quad \frac{1}{z^2-2z-3} = -\frac{1}{4}-\frac{\left(\frac{z-1}{2}\right)^2}{4}-\frac{\left(\frac{z-1}{z}\right)}{4}$$

Θεώρημα

Έστω $R_2 < R_1$, $\begin{array}{l} C_1 = \{z : |z-z_0| = R_1\} \\ C_2 = \{z : |z-z_0| = R_2\} \end{array}$

$A_{R_2,R_1}(z_0) = \{z : R_1 < |z-z_0| < R_2\}$ δακτύλιος χωρίς σύνορο

$\bar{A}_{R_2,R_1}(z_0) = \{z : R_1 \le |z-z_0| \le R_2\}$ δακτύλιος με σύνορο



Έστω $f(z)$ αναλυτική στο $\bar{A}_{R_2,R_1}(z_0)$. Τότε $\forall z \in A_{R_1,R_2}(z_0)$ ισχύει

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_0(z-z_0)^n$$

Αυτή λέγεται σειρά Laurent (Λοράντ) της $f(z)$ γύρω από το z_0.

$$\forall n \in \mathbb{Z}: \quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z$$

(η C εντός του $A_{R_2,R_1}(z_0)$)

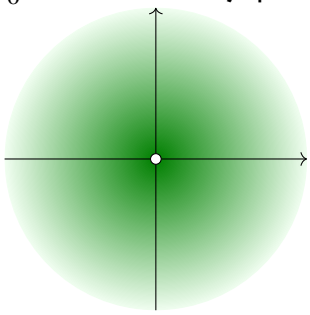
ΠΑΡ. Βρείτε την σειρά Laurent της $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$ γύρω από το $z_0 = 0$.

Λύση

$$\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\cdot\sin z$$
$$= \frac{1}{z^2}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots\right)$$

$$\forall z: 0<|z|<\infty: \quad \frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z}-\frac{z}{3!}+\frac{z}{5!}-\dots$$

Το $z_0 = 0$ είναι **πόλος** πρώτης τάξης.



ΠΑΡ $\frac{\sin z}{z}$

$$0 < |z| < \infty : \quad \frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

Το $z_0 = 0$ είναι απαλείψιμο ανώμαλο σημείο.

ΠΑΡ Να βρεθεί η σειρά Laurent της $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z+1)^2}$ γύρω από το $z_0 = -1$

Λύση

$$\begin{aligned}
\frac{e^{2z}}{(z+1)^2} &= \frac{e^{-2}}{(z+1)^2} \cdot e^{2(z+1)} \\
&= e^{-2} \cdot \frac{1}{(z+1)^2} \cdot \left(1 + 2(z+1) + \frac{4 \cdot (z+1)^2}{2!} + \frac{8 \cdot (z+1)^3}{3!} + \dots\right)
\end{aligned}$$

$$0 < |z+1| < \infty : \quad \frac{e^{2z}}{(z+1)^2} = \frac{e^{-2}}{(z+1)^2} + \frac{2e^{-2}}{z+1} + 2e^{-2} + \frac{4e^{-2}}{3} \cdot (z+1) + \dots$$

Παρατηρώ ότι $z_0 = -1$ είναι πόλος 2ης τάξης

$$\oint \frac{e^{2z}}{(z+1)^2}\,\mathrm{d}z = \cancelto{0}{\oint_C \frac{e^{-2}}{(z+1)^2}\,\mathrm{d}z} + \cancelto{2e^{-2}2\pi i}{\oint_C \frac{2e^{-2}}{z+1}\,\mathrm{d}z} + \cancelto{0}{\oint_C \frac{4e^{-2}}{3}(z+1)\,\mathrm{d}z} + \dots$$

$$\boxed{\oint \frac{e^{2z}}{(z+1)^2} = 2e^{-2}2\pi i}$$

Ορισμός

Έστω $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.
Έστω n_1 ο ελάχιστος n τ.ώ. $a_n \neq 0$.
(αν δεν υπάρχει το ελάχιστο, θέτω $n_1 = -\infty$)

α. Αν $-n_1 = 0$, τότε το z_0 είναι απαλείψιμο ανώμαλο σημείο (πόλος μηδενικής τάξης)

β. Αν $\infty > -n_1 > 0$, τότε το z_0 είναι πόλος τάξης $-n_1$

γ. Αν $n_1 = -\infty$, τότε το z_0 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο (πόλος ∞ τάξης)

Η $f(z) = e^{1/z}$ έχει το $z_0 = 0$ πόλο άπειρης τάξης.

7.2 Δέκα Σειρές Laurent

1. $f(z) = (z-2)\sin(z-1)$ γύρω από το $z_0 = 1$

Λύση

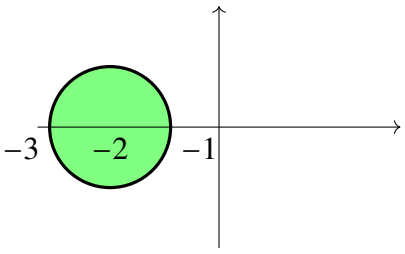
$$\begin{aligned} f(z) &= (z-1)\sin(z-1) - \sin(z-1) \\ &= (z-1)^2 - \frac{(z-1)^4}{3!} + \frac{(z-1)^6}{5!} - \dots - \left(z - 1 - \frac{(z-1)^3}{3!} + \frac{(z-1)^5}{5!} - \dots\right) \\ &= -(z-1) + (z-1)^2 + \frac{(z-1)^3}{3!} - \frac{(z-1)^4}{3!} + \dots \end{aligned}$$

Ισχύει $\forall z \in \mathbb{C}$

2. $f(z) = \frac{1}{z^2+3z+2}, \quad z_0 = -2$

Λύση

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{(z+1)(z+2)} = -\frac{1}{z+1} + \frac{2}{z+2} \\ g_2(z) &= \frac{1}{z+2} \\ g_1(z) &= -\frac{1}{z+1} = -\frac{1}{z+2-1} = \frac{1}{1-(z+2)} = 1 + (z+2) + (z+2)^2 + \dots \qquad 0 < |z+2| < 1 \\ f(z) &= g_2(z) + g_1(z) \\ &= \frac{2}{z+2} + 1 + (z+2) + (z+2)^2 + \dots \end{aligned}$$



Σε δυνάμεις της $(z+2)$ αλλά μακριά από το $z_0 = -2$ (δηλ. $|z+2| > 1$)

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{2}{z+2} + \frac{1}{1-(z+2)} \\ \frac{1}{1-(z+2)} &= -\frac{1}{z+2} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{z+2}+1} \\ &= -\frac{1}{z+2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z+2}} = -\frac{1}{z+2}\left(1 + \frac{1}{z+2} + \frac{1}{(z+2)^2} + \dots\right) \\ f(z) &= \frac{1}{z+2} - \frac{1}{(z+2)^2} - \frac{1}{(z+2)^3} - \dots \end{aligned}$$

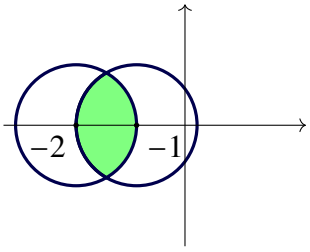
Το $z_0 = -2$ είναι πόλος $1^{\text{ης}}$ τάξης.

3. Η ίδια σειρά, γύρω και κοντά στο $z_0 = -1$

$$
\begin{aligned}
f(z) &= -\frac{1}{z+1} + \frac{2}{z+2} \\
g_2(z) &= \frac{2}{z+2} = \frac{2}{1+(z+1)} = 2 \cdot \left(1 - (z+1) + (z+1)^2 - (z+1)^3 + \dots\right) \\
f(z) &= -\frac{1}{z+1} + 2 - 2 \cdot (z-1) + 2(z+1)^2 - 2(z+1)^3 + \dots
\end{aligned}
$$

$$\boxed{-\frac{1}{z+1} + 2 - 2 \cdot (z-1) + 2(z+1)^2 - 2(z+1)^3 + \cdots = \frac{z}{z^2+3z+2}} \quad \boxed{0 < |z+1| < 1}$$

$$\boxed{\frac{2}{z+2} + 1 + (z+2) + (z+2)^2 + \cdots = \frac{z}{z^2+3z+2}} \quad \boxed{0 < |z+2| < 1}$$



Θα επιβεβαιώσω ότι οι δύο αυτές σειρές είναι ίσες μεταξύ τους και με την τιμή της συνάρτησης.

$$
\begin{aligned}
f\left(-{}^3/_2\right) &= \frac{-{}^3/_2}{{}^9/_4 - {}^3/_2 + {}^3/_4} &&= 6 \\
f_1\left(-{}^3/_2\right) &= 2 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots &&= 6 \\
f_2\left(-{}^3/_2\right) &= 4 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots &&= 6
\end{aligned}
$$

4. $f(z) = \frac{1}{z^2 \cdot (z-1)^2}$ γύρω από το $z_0 = 0$

Λύση

$$
\begin{aligned}
f_1(z) &= \frac{1}{z^2} \\
f_2(z) &= \frac{1}{(z-1)^2} \\
\frac{1}{1-z} &= 1 + z + z^2 + \dots \\
\frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{(1-z)^2} &= \left(\frac{1}{1-z}\right)' = (1 + z + z^2 + z^3 + \dots)' = 0 + 1 + 2z + 3z^2 + \dots \\
f_2(z) &= 1 + 2z + 3z^2 + \dots \\
f(z) = f_1 f_2 &= \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} + 3 + 4z + 5z^2 + \dots
\end{aligned}
$$

5. $f(z) = \frac{1}{z^2 \cdot (z-1)^2}, \quad z_0 = 1$

$$
\begin{aligned}
f_2(z) &= \frac{1}{(z-1)^2} \\
f_1(z) &= \frac{1}{z^2} = \frac{1}{\left(1 + (z-1)\right)^2} \\
\frac{1}{(1+u)^2} &= 1 - 2u + 3u^2 - \dots \\
\frac{1}{z^2} &= 1 - 2(z-1) + 3(z-1)^2 + \dots \\
f(z) &= \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{2}{(z-1)} + 3 - 4(z-1) + \dots
\end{aligned}
$$

$$\frac{1}{(1+u)^2} = \frac{1}{1 + 2u + u^2}$$

$$
\begin{array}{l|l}
1 & 1 + 2u + u^3 + \dots \\
\hline
1 + 2u + u^2 & 1 - 2u + 3u^2 + \dots \\
-2u - u^2 & \\
-2u - 4u^2 - 2u^3 & \\
3u^2 + 2u^3 &
\end{array}
$$

Ομοίως, τη σειρά της $\frac{1}{z^2+3z+2}$ γύρω από το $z_0 = -1$ μπορώ να την βρω αντικαθιστώντας:

$$\frac{1}{z^2 + 3z + 2} = \frac{1}{(z+1)^2 + (z-1)} = \frac{1}{u^2 + u}$$

$$
\begin{array}{l|l}
1 & u + u^2 \\
\hline
1 + u & \frac{1}{u} - 1 + \dots \\
-u &
\end{array}
$$

6. $f(z) = \frac{1}{z \cdot (z-1)}$ γύρω από το $z_0 = 0$

Λύση

$$
\begin{aligned}
f(z) &= -\frac{1}{z} \cdot (1 + z + z^2 + \dots) \\
&= -\frac{1}{z} - 1 - z - \dots
\end{aligned}
$$

για $0 < |z| < 1$

7. $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ γύρω από το $z_0 = 0$ για $|z| > 1$

Λύση $f(z) = f_1(z)f_2(z)$

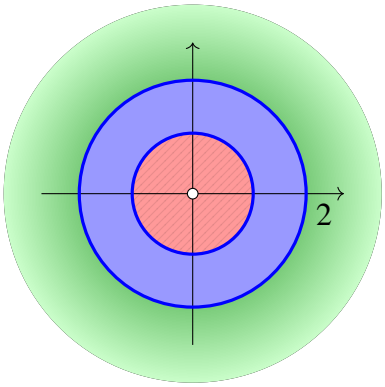
$$f_1(z) = \frac{1}{z}$$

$$f_2(z) = \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\dots\right)$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\dots$$

8. $f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2}$, να βρεθούν όλες οι δυνατές σειρές Laurent γύρω από το $z_0 = 0$.

Λύση Τα ΑΣ (ανώμαλα σημεία) είναι $z_1 = 1$ και $z_2 = -2$. Οπότε



1η σειρά: $|z| < 1$

2η σειρά: $1 < |z| < 2$

3η σειρά: $2 < |z|$

$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{z-1}}_{f_1(z)} + \underbrace{\frac{1}{z+2}}_{f_2(z)} = f_1(z) + f_2(z)$$

1η σειρά $|z| < 1$

$$f_1(z) = -(1+z+z^2+\dots)$$

$$f_2(z) = \frac{1}{z+2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\dots\right)}_{\left|\frac{z}{2}\right|<1}$$

άρα για $\forall z : |z| < 1$

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = -\frac{1}{2}-\frac{5z}{4}-\frac{7z^2}{8}-\dots$$

2η σειρά $1 < |z| < 2$ με $u = {}^1/_z$

$$f_1(z) = \frac{1}{\frac{1}{u}-1} = \frac{u}{1-u}$$

$$= u(1+u+u^2)+\dots$$

$$= u+u^2+u^3+\dots$$

$$f_1(z) = \frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\dots$$

$$f_2(z) = \frac{1}{2}-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{8}$$

Τελικά:

$$f(z) = \cdots - {}^{1}/_{z^2} - {}^{1}/_{2} - {}^{z}/_{4} + {}^{z^2}/_{8} + \ldots$$

3η σειρά $2 < |z|$

$$\begin{aligned}
f_1(z) &= \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \ldots \\
f_2(z) &= \frac{1}{z+2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{z}} \\
&= \frac{1}{z} \cdot \left(1 - \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} - \ldots\right) \\
f_2(z) &= \frac{1}{z} - \frac{2}{z^2} + \frac{4}{z^3} - \ldots \\
f(z) &= f_1 + f_2 = \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{5}{z^3}
\end{aligned}$$

Κεφάλαιο 8 Αρμονικές συναρτήσεις

Θεώρημα

Αν η $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) τότε

$$\begin{aligned}
u_x(x_0,y_0) &= v_y(x_0,y_0) \\
u_y(x_0,y_0) &= -v_x(x_0,y_0)
\end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{c}\text{Cauchy-}\\ \text{Riemann}\end{array}\right)$$

Παρ. $f(z) = z^3 = (x+iy)^3$

$$\begin{aligned}
&= x^3 + 3x^2iy + 3xi^2y^2 + (iy)^3 \\
&= (x^3 - 3xy^2) + i \cdot (3x^2y - y^3)
\end{aligned}$$

<u>Δηλ.</u> $\begin{aligned} u &= x^3 - 3xy^2 \\ v &= 3x^2y - y^3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u_x &= 3x^2 - 3y^2 = v_y \\ u_y &= -6xy = -v_x \end{aligned}$

Ορισμός

Λέμε την $u(x,y)$ **αρμονική** στο χωρίο D αν $\forall (x,y) \in D$:

(α) Οι u_{xx}, u_{yy}, u_{xy} είναι συνεχείς

(β) Ισχύει η εξίσωση του Laplace

$$\boxed{u_{xx} + u_{yy} = 0}$$

Θεώρημα

Αν η $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ είναι **αναλυτική στο** D, τότε οι $u(x,y),\ v(x,y)$ είναι αρμονικές στο D

Απόδ. Αφού η $f(z)$ είναι αναλυτική ισχύουν

$$\left.\begin{array}{r} u_x = v_y \\ v_x = -u_y \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} u_{xx} = v_{yx} \\ v_{xy} = u_{yx} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$
$$u_{xx} = -u_{yy} \Longrightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Ομοίως δείχνεται $v_{xx} + v_{yy} = 0$.

Παρ. $f(z) = z^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$
Θα δείξω ότι οι u, v αρμονικές

Λύση

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (u_x)_x = (3x^2 - 3y^2)_x = 6x \\ u_{yy} &= (u_y)_y = (-6yy) = -6x \\ u_{xx} + u_{yy} &= 6x - 6x = 0 \quad \text{άρα η } u \text{ αρμ.} \\ v_{xx} &= (v_x)_x = (6xy)_x = 6y \\ v_{yy} &= (v_y)_y = (3x^2 - 3y^2)_y = -6y \\ v_{xx} + v_{yy} &= 0 \quad \text{άρα η } v \text{ αρμ.} \end{aligned}$$

Ορισμός

Αν η $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ είναι αναλυτική, λέμε ότι οι u, v είναι **συζυγείς αρμονικές**

Παρ. Να βρεθεί η συζυγής αρμονική της $u = x^2 - y^2$

Λύση Από την εκφώνηση υποτίθεται ότι υπάρχει αναλυτική $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, με $u(x,y) = x^2 - y^2$. Τότε:

$$\begin{aligned} & u_x = 2x = v_y \Longrightarrow v(x,y) = \int 2x\,\mathrm{d}y = 2xy + c(x) \\ & \Longrightarrow v_x = 2y + \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} = -u_y = 2y \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} = 0 \\ & \Longrightarrow c \text{ σταθ.} \end{aligned}$$

Τελικά $v(x,y) = 2xy + c$, $f(z) = \underbrace{x^2 - y^2}_{u} + \underbrace{i2xy}_{v} + \tilde{c} = (x+iy)^2 + \tilde{c} = \boxed{z^2 + \tilde{c} = f(z)}$

Παρ. Να βρεθεί η συζυγής αρμονική της $u = e^x \cos y$

Λύση Με το μάτι $f(z) = e^z$, $v(x,y) = e^x \sin y$

Αλλιώς $u = e^x \cos y$, $u_x = e^x \cos y = v_y \Longrightarrow v = e^x \sin y + c \Longrightarrow v_x = e^x \sin y + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -u_y \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow v = e^x \sin y + c$

$$\begin{aligned} f(z) &= e^x \cos y + ie^x \sin y + \tilde{c} \\ &= e^x(\cos y + i \sin y) + \tilde{c} \\ &= e^x = e^x e^{iy} + \tilde{c} = e^z + \tilde{c} = f(z) \end{aligned}$$

8.1 Τι σημαίνει/σε τι χρησιμεύει/τι είναι η εξίσωση του Laplace;

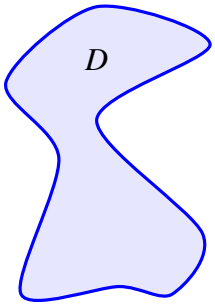
Η λύση της Εξ. Laplace περιγράφει προβλήματα όπως

(1) μετάδοση θερμότητας σε σταθερή κατάσταση

(2) ροή ρευστών

(3) πυκνότητα ηλ. φορτίου

(4) δυναμικό μέσα σε έναν αγωγό

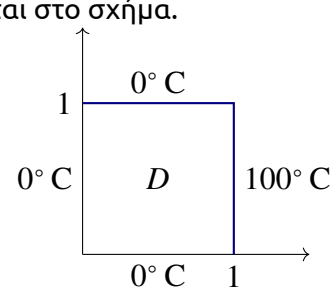


Η εξ. Laplace $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ είναι διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους. Αν αυτή ισχύει σε κάποιο χωρίο D και την εφοδιάσω με **οριακές συνθήκες** (τιμές της $u(x, y)$ στο ∂D - σύνορο του D), τότε έχω μοναδική λύση στο πρόβλημα Dirichlet:

(1) $\forall (x, y) \in D : \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

(2) $\forall (x, y) \in \partial D : u(x, y) = F(x, y)$

Παρ. Ένα μεταλλικό τετράγωνο έλασμα D έχει σταθερές θερμοκρασίες στα άκρα του, όπως φαίνεται στο σχήμα.



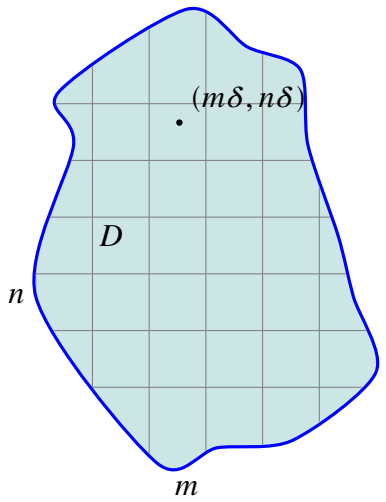
Η θερμοκρασία του ελάσματος δίνεται από τη λύση του:

(1) $\forall (x, y) : \begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{array} : u_{xx} + u_{yy} = 0$

(2) $\forall (x, y) : \begin{array}{l} u(x, 0) = 0 \\ u(x, 1) = 0 \\ u(0, y) = 0 \\ u(1, y) = 100 \end{array}$

Τι σχέση έχουν όλα αυτά με (1) μιγαδικές συναρτήσεις, (2) λογισμό ΙΙ;
Τι ασκήσεις μπαίνουν στις εξετάσεις;
Τι σημαίνει η εξ. Laplace;

Διακριτοποίηση εξίσωσης Laplace

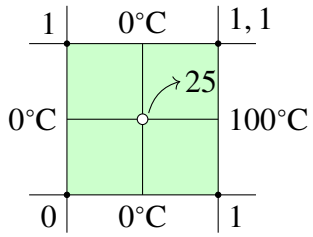


$$\forall (x,y) \in D : u_{xx} + u_{yy} = 0$$
$$\forall (x,y) \in \partial D : u(x,y) = \underbrace{F(x,y)}_{\text{δεδομένη συνάρτηση}}$$
$$u_x(m\delta, n\delta) \simeq \frac{u\left((m+1)\delta, n\delta\right) - u(m\delta, n\delta)}{\delta}$$
$$u_x\left((m-1)\delta, n\delta\right) \simeq \frac{u(m\delta, n\delta) - u\left((m-1)\delta, n\delta\right)}{\delta}$$
$$u_{xx}(m\delta, n\delta) \simeq \frac{u_x(m\delta, n\delta) - u_x\left((m-1)\delta, n\delta\right)}{\delta}$$
$$u_{xx} \simeq \frac{u\left((m+1)\delta, n\delta\right) - 2u(m\delta, n\delta) - u\left((m-1)\delta, n\delta\right)}{\delta^2}$$
$$u_{yy} \simeq \frac{u\left(m\delta, (n+1)\delta\right) - 2u(m\delta, n\delta) - u\left(m\delta, (n-1)\delta\right)}{\delta^2}$$

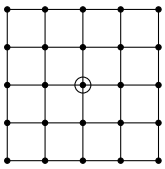
$$0 = u_{xx} + u_{yy} = \frac{-4u(m\delta,n\delta)+u((m+1)\delta,n\delta)+u(m\delta,(n+1)\delta)+u((m-1)\delta,n\delta)+u(m\delta,(n-1)\delta)}{\delta^2}$$
$$\Longrightarrow \quad u(m\delta, n\delta) = \frac{u\left((m+1)\delta, n\delta\right) + u\left((m-1)\delta, n\delta\right) + u\left(m\delta, (n+1)\delta\right) + u\left(m\delta, (n-1)\delta\right)}{4}$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι η εξίσωση Laplace δηλώνει ότι η τιμή σε κάθε σημείο είναι ο μέσος όρος της τιμής των 4 γειτονικών σημείων.

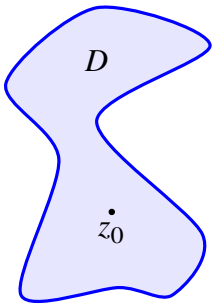
Παρ. Στο προηγούμενο πρόβλημα:



$$u\left(1/2, 1/2\right) = \frac{1}{4}\left(u\left(1/2, 0\right) + u\left(1/2, 1\right) + u\left(0, 1/2\right) + u\left(1, 1/2\right)\right)$$
$$\Longrightarrow \quad u\left(1/2, 1/2\right) = \frac{1}{4}(0 + 0 + 0 + 100)$$
$$= 25$$



Τότε θα μπορούσαμε να βρούμε τη λύση λύνοντας ένα σύστημα 9x9, ή με υπολογιστική προσέγγιση.



$$\begin{aligned}
&\forall (x,y) \in D : u_{xx} + u_{yy} = 0 \\
&\forall (x,y) \in \partial D : u(x,y) = \underbrace{F(x,y)}_{\text{δεδομένη συνάρτηση}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z \\
u(x_0, y_0) &= \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial D} \mathrm{Re} \left(\frac{u(x,y) + iv(x,y)}{x - x_0 + i(y - y_0)} \, \mathrm{d}\,(x + iy) \right) \\
v(x_0, y_0) &= \cdots
\end{aligned}$$

Από θεώρημα του Gauss/Μέσης Τιμής:

$$\begin{aligned}
\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) \, \mathrm{d}\theta} \\
u(x_0, y_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) \, \mathrm{d}\theta \\
v(x_0, y_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) \, \mathrm{d}\theta,
\end{aligned}$$

δηλαδή σε κάθε σημείο η τιμή είναι ο μέσος όρος των γειτόνων.

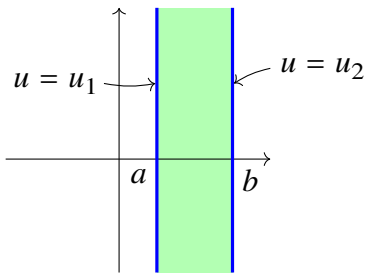
Αυτά που μπαίνουν στις εξετάσεις είναι: Να βρεθεί η συζυγής αρμονική, και να λυθεί η εξίσωση Laplace, κάτι που θα μάθουμε τις επόμενες Παρασκευές.

8.2 Αρμονικές στην εξίσωση Laplace

Παρ. Δίνεται το χωρίο $D = \{z : a < \mathrm{Re}(z) < b\}$

Να βρεθεί $u(x,y)$ τ.ώ
$$\begin{aligned}
&\forall (x,y) \in D && : u_{xx} + u_{yy} = 0 \\
&\forall y && : u(a,y) = u_1 \\
&\forall y && : u(b,y) = u_2
\end{aligned}$$

Λύση



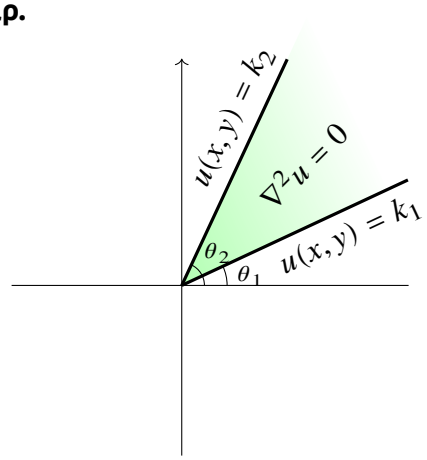
Λόγω συμμετρίας υποθέτω ότι $u(x,y) = u(x)$ οπότε $0 = u_{xx} + u_{yy} = u_{xx} \implies u_x = k \implies u = kx + \lambda$

Χρησιμοποιώντας τις οριακές συνθήκες:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= u(a) = ka + \lambda \\ u_2 &= u(b) = kb + \lambda \end{aligned}\right| \implies \boxed{u(x,y) = \frac{u_1 - u_2}{a - b}x + \underset{u_1}{?}}$$

$$\begin{aligned}
&u = kx + \lambda \\
&v = 0 \\
&u_y = -v_x \implies 0 = -v_x \implies v = c(y) \\
&\implies v_y = \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}y} = u_x = k \implies v(y) = ky + c' \\
&\implies f(x,y) = u + iv = kx + \lambda + i(ky + c') \\
&\implies f(z) = kz + c''
\end{aligned}$$

Παρ.



$$\begin{aligned}
&\hat{u}(\rho,\theta) = u(\theta) \\
&D = \{(\rho,\theta) : \theta_1 < \theta < \theta_2\} \\
&D = \{z : \theta_1 < \operatorname{Arg}(z) < \theta_2\} \\
&u(z) = u_1 \text{ όταν } \operatorname{Arg}(z) = \theta_1 \\
&u(z) = u_2 \text{ όταν } \operatorname{Arg}(z) = \theta_2
\end{aligned}$$

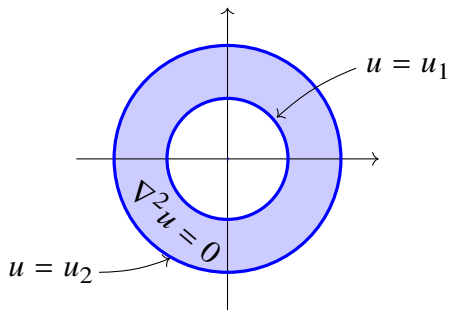
Παρατηρώ ότι $\operatorname{Arg}(z) = \operatorname{Im}(\operatorname{Log}(z))$

Άρα με $f(z) = \operatorname{Log}(z)$, η $\operatorname{Arg}(z)$ είναι αρμονική όπως και η $u(z) = k \cdot \operatorname{Arg}(z) + \lambda$, ισοδύναμα $\boxed{u(x,y) = k \cdot \arctan(y,x) + \lambda}$

Σημείωση: $\arctan(y,x) = \operatorname{Arg}(x + iy)$

$$\boxed{u(x,y) = \frac{u_1 - u_2}{\theta_1 - \theta_2}\arctan(y,x) + \lambda}$$

Παρ.



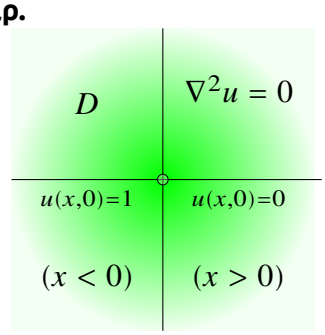
$u(x,y) = g(r)$

Παρατηρώ ότι $f(z) = \underbrace{\mathrm{Log}(z)}_{\text{αναλυτική}} = \underbrace{\ln r}_{\text{αρμονική}} + i\,\mathrm{Arg}(z)$

Άρα υποθέτω λύση της μορφής:

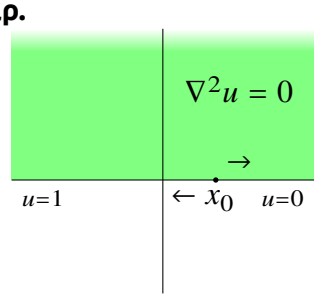
$$u(x,y) = k\ln r + \lambda \implies \ldots$$
$$u(x,y) = \frac{u_1 - u_2}{R_1 - R_2}\ln(r) + c$$

Παρ.

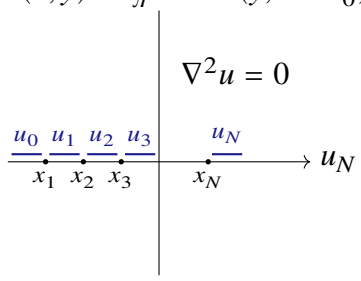


$$u(x,y) = \frac{u_2 - u_1}{\theta_2 - \theta_1}\arctan(y,x) + u_1 = \boxed{\frac{1}{\pi}\arctan(y,x) = u(x,y)}$$
$$x < 0 : u(x,0) = \frac{1}{\pi}\arctan(0,x) = \frac{\pi}{\pi} = 1$$
$$x > 0 : u(x,0) = \frac{1}{\pi}\arctan(0,x) = \frac{0}{\pi} = 0$$

Παρ.



$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\arctan(y, x - x_0)$



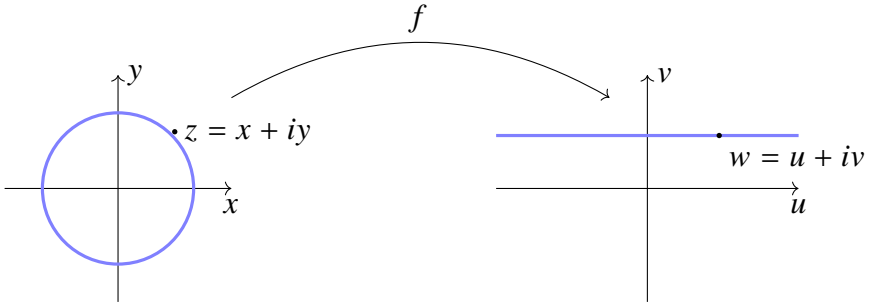
$$u(x,0) = \begin{cases} u_0 & x < x_1 \\ u_1 & x_1 < x < x_2 \\ u_2 & x_2 < x < x_3 \\ \vdots & \vdots \\ u_n & x_N < x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{N} (u_n - u_{n-1}) \arctan(y, x_n - x) + u_0 \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{N-1} (u_{n-1} - u_n) \arctan(y, x - x_n) + u_{N-1} \end{aligned}$$

8.3 Επίλυση προβλήματος Dirichlet σε άλλα χωρία

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = f(z)$$

Μετασχηματισμός Möbius



Απεικονίζει (κύκλους και ευθείες) σε (κύκλους και ευθείες)

Παρ. Ο Μ/Σ $\left(\frac{i-z}{i+z}\right)$ απεικονίζει την ευθεία $\{(x,0) : x \in\}$ στον κύκλο $\left\{(u,v) : u^2 + v^2 = 1\right\}$

διότι $w = \frac{i-x}{i+x} \implies |w| = \frac{|i-x|}{|i+x|} = 1$

Επίσης απεικονίζει το άνω ημιεπίπεδο $\{(x,y) : x \in \mathbb{R},\ y > 0\}$ στον δίσκο $\left\{(u,v) : u^2 + v^2 < 1\right\}$

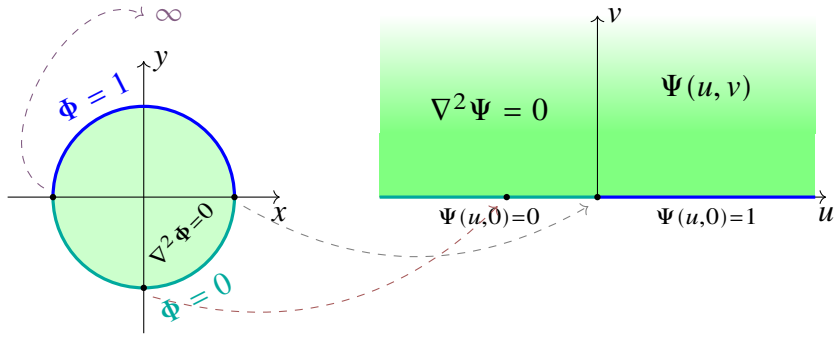
διότι $|w|^2 = \left|\frac{i-(x+iy)}{i+(x+iy)}\right|^2 = \left|\frac{-x+i(-y+1)}{x+i(y+1)}\right|^2 = \frac{A}{B}$

$$A = |-x + i(-y+1)|^2 = x^2 + (1-y)^2$$
$$B = |x + i(y+1)|^2 = x^2 + (1+y)^2$$

Βλέπω ότι $(1-y)^2 < (1+y)^2 \quad \forall y < 0$ διότι $\forall y > 0 : A < B$

Τι σχέση έχουν αυτά με τις αρμονικές συναρτήσεις και με το πρόβλημα Dirichlet; Μπορούν να χρησιμοποιηθούν για λύση του προβλήματος σε χωρία πέρα του άνω ημιεπιπέδου.

Παρ. Να λυθεί αυτό:



$$\Phi(x,y) = \begin{cases} 1: & 0 < \theta = \arctan(y,x) < \pi \\ 0: & \pi < \theta = \arctan(y,x) < 2\pi \end{cases}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τον παραπάνω μετασχηματισμό Möbius για να μετατρέψουμε το πρόβλημα του κυκλικού δίσκου σε πρόβλημα ημιεπιπέδου. Γι' αυτό πρέπει να βρούμε τις οριακές συνθήκες του ημιεπιπέδου, χρησιμοποιώντας τις οριακές συνθήκες του Laplace:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{i-w}{i+w} \implies i+w = i-w \implies w = -w \implies w = 0 \\ -1 &= \frac{i-w}{i+w} \implies -i-w = i-w \implies w = \infty \\ i &= \frac{i-w}{i+w} \implies iw-1 = i-w \implies w = 1 \\ -i &= \frac{i-w}{i+w} \implies \cdots \implies w = -1 \end{aligned}$$

Στο επίπεδο uw το πρόβλημα $\nabla^2\Psi = 0$ στο $\{(u,v) : v > 0\}$, $\begin{cases} 1 & \forall (u,0) : u > 0 \\ 0 & \forall (u,0) : u < 0 \end{cases}$

$$\Psi = 1 - \frac{1}{\pi}\arctan(v,u)$$

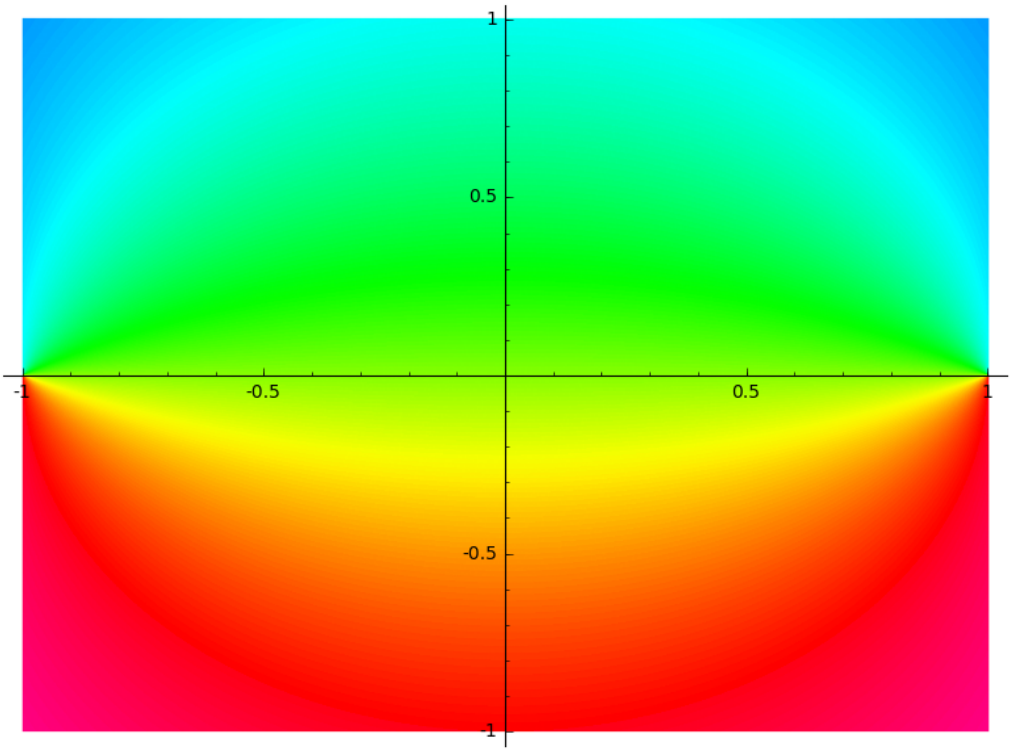
οπότε $\Phi(x,y) = 1 - \frac{1}{\pi}\arctan\left(v(x,y),\ u(x,y)\right)$

$$x + iy = \frac{i-(u+iv)}{i+(u+iv)} = \underbrace{\cdots}_{\text{πραγμ.}} + i\underbrace{\cdots}_{\text{φαντ.}} \implies \cdots$$

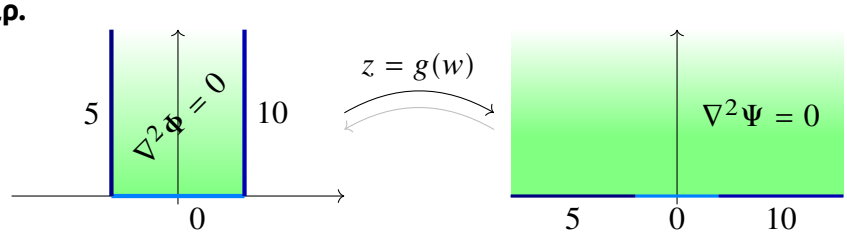
$$\cdots \implies u = \frac{2y}{(1+x)^2+y^2},\ v = \frac{1-(x^2+y^2)}{(1+x)^2+y^2}$$

οπότε τελικά:

$$\boxed{\Phi(x,y) = 1 - \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1-(x^2+y^2)}{(1+x)^2+y^2}, \frac{2y}{(1+x)^2+y^2}\right)}$$



Παρ.



$$w = f(z) = \sin(\pi z)$$
$$z = g(z) = \frac{1}{\pi}\arcsin(w)$$

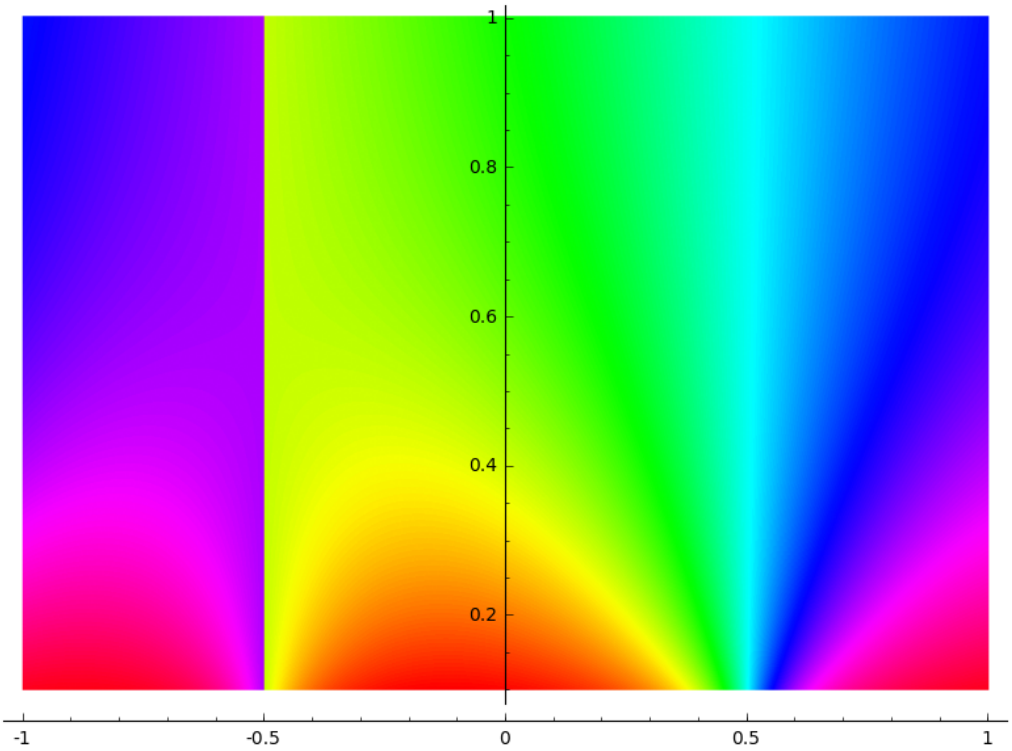
Υπενθυμίζουμε ότι

$$\begin{aligned} w &= \sin(\phi) = \sin(a+ib) = \\ &= \sin(a)\cos(ib) + \sin(ib)\cos(a) \\ &= \sin a \cosh b + i \sinh b \cos a \\ w &= \sin(\pi z) = \sin(\pi x)\cosh(\pi y) + i\sinh(\pi y)\cos(\pi x) \end{aligned}$$

Και η λύση προκύπτει:

$$\boxed{\Psi = \frac{5}{\pi}\arctan(v, u+1) - \frac{10}{\pi}\arctan(v, u-1) + 10}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \Phi = & \quad \tfrac{5}{\pi}\arctan\left(\sinh(\pi y)\cos(\pi x), \sin(\pi x)\cosh(\pi y) + 1\right) \\ & - \tfrac{10}{\pi}\arctan\left(\sinh(\pi y)\cos(\pi x), \sin(\pi x)\cosh(\pi y) - 1\right) \\ & + 10 \end{aligned}}$$



8.4 Τύποι του Poisson

Εκτός ύλης

Εκτός ύλης

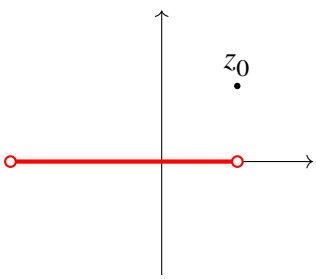
8.4.1 Τύπος του Poisson για ημιεπίπεδο

Αν η $f(z)$ φραγμένη και τμηματικά συνεχής και αρμονική στο άνω ημιεπίπεδο $\forall z_0$:

$$f(z_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_0 f(x)}{(x-x_0)^2 + y^2}\,\mathrm{d}x$$

και αν $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$:

$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_0 u(x,0)}{(x-x_0)^2 + y_0^2}\,\mathrm{d}x \,\Bigg|\, v(x_0,y_0) = \cdots$$



Απόδ. Έστω $z_0 \in \tilde{D}$, $\bar{z_0} \notin \tilde{D}$.

$$
\begin{aligned}
f(z_0) &= \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z \\
0 &= \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{f(z)}{z - \overline{z_0}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi} \oint_C \left(\frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{z - \overline{z_0}} \right) f(z) \, \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{z_0 - \overline{z_0}}{(z - z_0)(z - \overline{z_0})} f(z) \, \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{\pi} \oint_C \frac{y_0 f(z)}{z^2 + |z_0|^2 - 2x_0 z} \, \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{[-R,R]} \frac{y_0 f(x)}{x^2 + x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 x} \, \mathrm{d}x + \frac{1}{\pi} \int_\Gamma \frac{y_0 f(z)}{z^2 + \left|z_0\right|^2 + 2x_0 z} \, \mathrm{d}z \\
\Longrightarrow f(z_0) &= \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \frac{y_0 f(x)}{(x - x_0)^2 + y_0^2} \, \mathrm{d}x + \frac{1}{\pi} \underbrace{\lim_{R \to \infty} \int_\Gamma \frac{y_0 f(z)}{z^2 + \left|z_0\right|^2 + 2x_0 z} \, \mathrm{d}z}_{=0 \text{ (λήμμα Jordan)}}
\end{aligned}
$$

Παρ. Να λυθεί το πρόβλημα

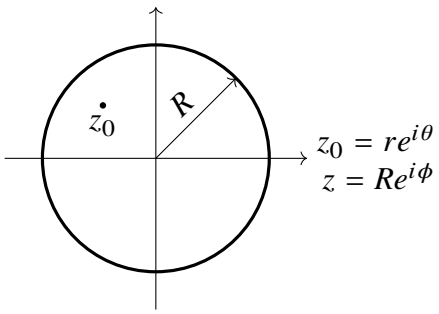
$$
\begin{aligned}
u(x_0, y_0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_0 u(x, 0)}{(x - x_0)^2 + y_0^2} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{y_0 \cdot 1}{(x - x_0^2) + y_0^2} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi} \arctan(y_0, x_0 - 1) - \frac{1}{\pi} \arctan(y_0, x_0 + 1)
\end{aligned}
$$

8.4.2 Τύπος του Poisson για δίσκο

Αν η $f(z)$ φραγμένη, τμηματικά συνεχής και αρμονική στον δίσκο $D_R(0)$, τότε:

$$
f(z_0) = \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) f\left(Re^{i\phi}\right)}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2} \, \mathrm{d}\phi
$$

$$
u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\left(R^2 - r^2\right) u(r, \phi)}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \pi)} \, \mathrm{d}\phi
$$



Απόδ.

$$\zeta = Re^{i\phi}$$

$$Z = \frac{\zeta\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}} \qquad |Z| = \left|\frac{\zeta\bar{\zeta}}{\bar{z}}\right| = \frac{|\zeta|^2}{|z|} = \frac{R^2}{|z|} > R, \qquad \text{άρα όταν } z \in D_0(R), \text{ τότε } z \notin D_0(R)$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\oint \frac{\zeta f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,\mathrm{d}\zeta$$
$$0 = \frac{1}{2\pi}\oint \frac{f(\zeta)}{\zeta - Z}\zeta\,\mathrm{d}\phi$$

$$\frac{\zeta}{\zeta - Z} = \frac{\zeta}{\zeta - \frac{\zeta\bar{\zeta}}{\bar{z}}} = \frac{z\bar{z}}{\zeta\bar{z} - \zeta\bar{\zeta}} = \frac{\bar{z}}{\bar{z} - \bar{\zeta}}$$
$$\zeta = Re^{i\phi}$$
$$\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\phi} = Rie^{i\phi} = \zeta i$$
$$\mathrm{d}\zeta = i\zeta\,\mathrm{d}\phi$$
$$\frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\bar{z}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} = \frac{\zeta(\bar{\zeta}) + \bar{\zeta}(\zeta - z)}{|\zeta - z|^2} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\phi - \theta)}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi}\oint\left(\frac{\zeta}{\zeta - z} - \frac{\zeta}{\zeta - z}\right)f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$
$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi}\oint_C\left(\frac{\zeta}{\zeta - z} - \frac{\bar{z}}{\bar{z} - \bar{\zeta}}\right)$$
$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{\left(R^2 - r^2\right)f\left(Re^{i\phi}\right)}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi)}$$

Παρ. Να λυθεί το πρόβλημα: (???)

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\left(1 - r^2\right)100}{1^2 + r^2 - 2r\cos(\theta - \phi)}\,\mathrm{d}\phi$$
$$u(r,\theta) = \frac{2\cdot 50}{\pi}\arctan\left(r^2 - 1, 2r\sin\theta\right)$$

$$\frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\bar{z}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} = \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}$$

$$\frac{\zeta + z}{\zeta - z} = \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \cdot \frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} = \frac{\zeta\bar{\zeta} - z\bar{z} + i \cdot (\cdots)}{\left|\zeta^2 - z\right|^2}$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\right) = \frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\bar{z}}{\bar{\zeta} - \bar{z}}$$

$$\frac{\zeta + z}{\zeta - z} = \frac{1 + \frac{z}{\zeta}}{1 - \frac{z}{\zeta}} = \left(1 + \frac{z}{\zeta}\right)\left(1 + \frac{z}{\zeta} + \left(\frac{z}{\zeta}\right)^2 + \dots\right) = \mathrm{Re}\left(1 + 2\frac{z}{\zeta} + 2\left(\frac{z}{\zeta}\right)^2 + 2\left(\frac{z}{\zeta}\right)^3\right)$$

$$z = re^{i\theta}, \quad \zeta = Re^{i\phi}$$

$$\frac{z}{\zeta} = \frac{r}{R}e^{i(\theta - \phi)}$$

$$\left(\frac{z}{\zeta}\right)^2 = \frac{r^2}{R^2}e^{iR(\theta - \phi)}$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^n = \mathrm{Re}\left(\frac{r^n}{R^n}e^{in(\theta - \phi)}\right) = \frac{r^n}{R^n}\cos\left(n(\theta - \phi)\right)$$

$$\begin{aligned}
u(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\theta - \phi)\right) u(R, \phi)\,\mathrm{d}\phi = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \int_0^{2\pi} (\cos n\theta \cos n\phi + \sin n\theta \sin n\phi)\, u \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \left[\cos n\theta \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R, \phi)\cos n\phi\,\mathrm{d}\phi + \sin n\theta \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R, \phi)\sin n\phi\,\mathrm{d}\phi\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) = u(r, \theta)
\end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R, \phi)\cos n\phi\,\mathrm{d}\phi, \quad b_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R, \phi)\sin n\phi\,\mathrm{d}\phi$$

8.4.3 Επίλυση της $\nabla^2 u$ με χωρισμό μεταβλητών σε πολικές συντεταγμένες

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$$

Υποθέτω ότι η λύση είναι της μορφής $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$, οπότε:

$$\begin{aligned}
& R_{rr}\Theta + \frac{1}{r}R_r\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta_{\theta\theta} = 0 \\
\xRightarrow{\frac{r^2}{\Theta}} & r^2 R_{rr} + rR_r + R\frac{\Theta_{\theta\theta}}{\Theta} = 0 \\
\xRightarrow{\frac{1}{\theta}} & \underbrace{\frac{r^2 R_{rr}}{R} + \frac{rR_r}{R}}_{k^2} + \underbrace{\frac{\Theta_{\theta\theta}}{\Theta}}_{-k^2} = 0 \\
\Rightarrow & r^2 R_{rr} + rR_r - k^2 R = 0 \\
& \Theta_{\theta\theta} + k^2\Theta = 0
\end{aligned}$$

Λύσεις: $\Theta(\theta) = A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta$

Για να έχει περίοδο 2π, πρέπει $k \in \mathbb{N}$.

Τελικά όλες οι $\Theta_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta$ είναι λύσεις της εξίσωσης και αντίστοιχα λύσεις $R_n(r)$.

Οπότε έχω λύσεις $u_n(r,\theta) = R_n(r)\Theta_n(\theta)$ και επίσης η $u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(r)\Theta_n(\theta)$

<u>Δηλ.</u>

$$\boxed{u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(r)\,(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)}$$