

ΨΕΣ

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Σημειώσεις από τις παραδόσεις*

Για τον κώδικα σε L^AT_EX, ενημερώσεις και προτάσεις:

<https://github.com/kongr45gpen/ece-notes>

Φθινόπωρο 2018

Τελευταία ενημέρωση: 4 Φεβρουαρίου 2019

Λάθη & Διορθώσεις

Οι τελευταίες εκδόσεις των σημειώσεων βρίσκονται στο Github (<https://github.com/kongr45gpen/ece-notes/raw/master/dsp.pdf>) ή στη διεύθυνση <http://helit.org/ece-notes/dsp.pdf>.

Περιέχουν διορθώσεις σε λάθη και τυχόν βελτιώσεις.

Μπορείτε να ενημερώνετε για οποιοδήποτε λάθος και πρόταση μέσω PM στο forum, issue στο Github, ή οποιοδήποτε άλλου τρόπου.

Μέχρι τώρα, 10 άτομα έχουν γράψει έστω και λίγο κώδικα για τις σημειώσεις όλων των μαθημάτων, 24 άτομα έχουν προτείνει διορθώσεις, και έχουν γίνει συνολικά **106** αλλαγές χάρη σε δικές σας προτάσεις!

Κατάλογος Διαλέξεων

1	Διάλεξη 1/10/2018	3
2	Διάλεξη 5/10/2018	8
3	Διάλεξη 8/10/2018	14
4	Διάλεξη 12/10/2018	20
5	Διάλεξη 15/10/2018	27
6	Διάλεξη 19/10/2018	31
7	Διάλεξη 22/10/2018	38
8	Διάλεξη 29/10/2018	42
9	Διάλεξη 2/11/2018	48
10	Διάλεξη 5/11/2018	53
11	Διάλεξη 9/11/2018	59
12	Διάλεξη 12/11/2018	60
14	Διάλεξη 23/11/2018	64
15	Διάλεξη 26/11/2018	67
16	Διάλεξη 30/11/2018	69
17	Διάλεξη 3/12/2018	73
18	Διάλεξη 7/12/2018	75

*Όπως διδάσκονται στο τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	3
1.1	Ιδιότητες	4
1.1.1	Χρήσιμοι τύποι ακολουθιών	5
1.1.2	Χαρακτηριστικά Μεγέθη	6
1.1.3	Χρήσιμες ακολουθίες	6
1.1.4	Συνέλιξη	7
1.2	Συστήματα	7
1.2.1	Συνέλιξη	9
1.2.2	Ευστάθεια	14
1.2.3	Αιτιατότητα	16
1.2.4	Μερικοί χρήσιμοι ορισμοί για ακολουθίες	16
2	Συνεχής μετασχηματισμός Fourier διακριτού σήματος (Discrete-Time Fourier Transform)	17
2.1	Απόκριση γραμμικού ΑΚΜ συστήματος σε εκθετική είσοδο	17
2.1.1	Απόκριση συστήματος σε ημιτονοειδείς συναρτήσεις	18
2.2	Μετασχηματισμός Fourier	20
2.2.1	Ιδιότητες της απόκρισης συχνότητας	20
3	Μετασχηματισμός Z	23
3.1	Περιοχή σύγκλισης	23
3.2	Αντίστροφος μετασχηματισμός Z	27
3.3	Μέθοδοι υπολογισμού αντίστροφου μετασχηματισμού Z	27
3.3.1	Ολοκληρωτικά υπόλοιπα	27
3.3.2	Μέθοδος συνεχούς διαίρεσης	31
3.4	Ιδιότητες του μετασχηματισμού Z	31
3.5	Εξίσωση διαφορών για γραμμικό & ΑΚΜ σύστημα	43
3.5.1	Εξαγωγή συνάρτησης μεταφοράς	44
3.5.2	Σύνδεση συστημάτων	48
4	Δειγματοληψία	53
4.1	Χρήσιμα Σήματα	55
4.2	Η διαδικασία της δειγματοληψίας	55
4.2.1	Σχέσεις συχνοτήτων	58
4.3	Aliasing (φασματική επικάλυψη)	59
4.4	Spectral leakage (φασματική διαρροή)	59
4.5	Under-Sampling (Υποδειγματοληψία)	60
4.6	Διακριτές σχέσεις Kramers-Kronig	62
5	Σχεδίαση ψηφιακών φίλτρων	64
5.1	Αναλογικά φίλτρα Butterworth	64
5.2	Αριθμητική επίλυση διαφορικής εξίσωσης	66
5.3	Διγραμμικός Μετασχηματισμός	69
5.4	Συνελκτικά ολοκληρώματα	73
5.4.1	Ακρίβεια της ψηφιακής προσέγγισης	74

Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή

Στο μάθημα της **Ψηφιακής Επεξεργασίας Σήματος** ασχολούμαστε με προβλήματα όπως το εξής:

Παλιότερα, αν μας ζητούνταν να κατασκευάσουμε ένα φίλτρο (π.χ. ζωνοπερατό από 20 Hz - 500 kHz), μπορούσαμε πολύ εύκολα να αγοράσουμε μια σακούλα με όλα τα εξαρτήματα (πυκνωτές, αντιστάσεις, ...) από ένα κατάστημα και να φτιάξουμε το κύκλωμα.

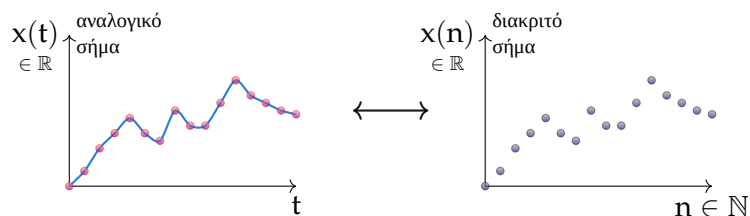
Αν αργότερα μας ζητούσαν να φτιάξουμε ένα φίλτρο 20 Hz - 300 kHz, θα έπρεπε να ξαναπάμε στο κατάστημα και να αγοράσουμε ξανά νέα σακούλα και νέα εξαρτήματα και να ξανακατασκευάσουμε το κύκλωμα.

Από τη στιγμή όμως που εφευρέθηκαν οι υπολογιστές, φανταστήκαμε να τους χρησιμοποιήσουμε και για να πραγματοποιήσουμε την παραπάνω διαδικασία και να αλλάζουμε προδιαγραφές όσο συχνά θέλουμε χωρίς να τρέχουμε στο κατάστημα.

Αυτή η διαδικασία απαιτεί τα εξής:

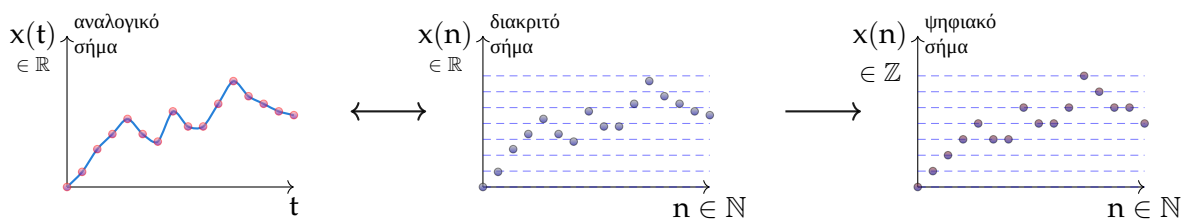
- Πρέπει να μετατρέψουμε το *πραγματικό αναλογικό* σήμα σε μια μορφή που αναγνωρίζει αυτός ο υπολογιστής. Δηλαδή να μετατραπεί από αναλογικό σε ψηφιακό. Αυτό γίνεται με δύο βήματα:

1. **Δειγματοληψία.** Πρώτα πρέπει με έναν συγκεκριμένο τρόπο να λάβουμε *δείγματα* σε *διακριτές* στιγμές του αρχικού αναλογικού σήματος. Αφού ο υπολογιστής δεν μπορεί να αποθηκεύσει άπειρες τιμές, αναγκαστικά θα λάβουμε ένα πεπερασμένο εύρος τους.



Αυτό το σήμα ονομάζεται **διακριτό (discrete)**.

2. **Κβάντωση.** Στον αναλογικό κόσμο, οι πεπερασμένες τιμές έχουν άπειρη ακρίβεια. Όμως στον υπολογιστή δεν μπορούμε να αποθηκεύσουμε άπειρα δεκαδικά ψηφία, αλλά πρέπει να τα αποθηκεύσουμε σε πεπερασμένες στάθμες που μας επιτρέπεται να χρησιμοποιηθούν.



Αυτό το σήμα ονομάζεται **ψηφιακό (digital)**.

Σε αυτό το μάθημα, παρά τον τίτλο του, θα ασχοληθούμε με **διακριτά σήματα**, και όχι ψηφιακά.

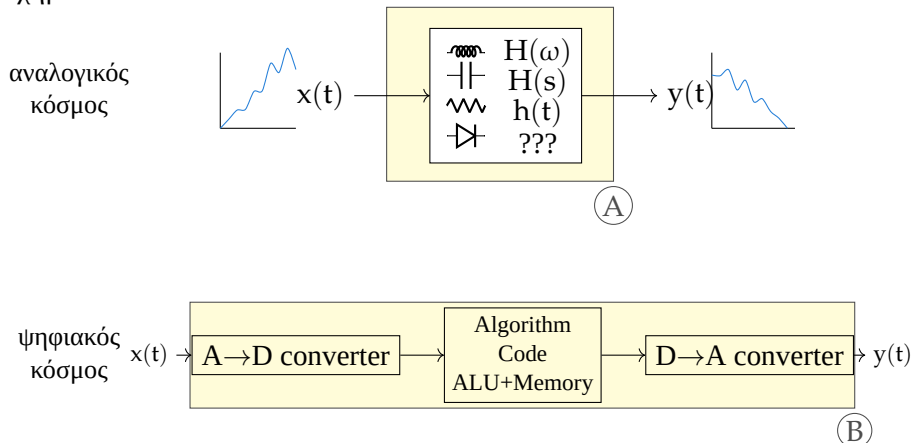
Για να επεξεργαστούμε τα σήματα, υποθέτουμε ότι θα υπάρχει μια συσκευή που μετατρέπει το *Αναλογικό σήμα* σε *Διακριτό σήμα* με τέτοιον τρόπο ώστε να μπορούμε να γυρίσουμε πίσω και να μπορούμε να το επεξεργαστούμε με έναν ασφαλή τρόπο που θα επιστρέψει σίγουρα σωστό αποτέλεσμα. Αυτό το εξασφαλίζει το **θεώρημα δειγματοληψίας** (Nyquist-Shannon), σύμφωνα με το οποίο για να αναπαραστήσουμε ένα ζωνοπερατό σήμα, αρκεί να το δειγματοληπτήσουμε με συχνότητα διπλάσια της μέγιστης συχνότητας του σήματος.

Στην πραγματικότητα βέβαια, το θεώρημα δειγματοληψίας απαιτεί να δειγματοληπτούμε για άπειρο χρόνο, κάτι μη πραγματικά εφικτό. Μάλιστα, τα πραγματικά σήματα είναι *χρονοπερατά*, άρα *μη ζωνοπερατά*, επομένως εν γένει δεν εφαρμόζεται το θεώρημα δειγματοληψίας. Όμως η παραπάνω διαδικασία μπορούμε να πούμε ότι δίνει προσεγγιστικά ορθό αποτέλεσμα.

Ακόμα, υπάρχουν σήματα που είναι από τη φύση τους ψηφιακά, όπως τιμές χρηματιστηρίου, ακολουθίες, δεδομένα, followers στο instagram, ...

- Παραμένει η ίδια η **επεξεργασία** του σήματος. Αυτή γίνεται με κώδικα ενός αλγορίθμου που εκτελεί πράξεις, δεδομένου ότι έχει επεξεργαστεί το σήμα σωστά.

Σχηματικά:



Θέλουμε η διαδικασία A που είναι ένα **πραγματικό, φυσικό** φίλτρο ή κύκλωμα, να βγάξει περίπου ίδιο αποτέλεσμα με μια διαδικασία B που υλοποιούμε ψηφιακά, δηλαδή:

$$A \simeq B$$

ή, ισοδύναμα για τα σήματα $x(t)$ και $y(t)$:

$$A [x(t)] \simeq B [x(t)]$$

$$y_{\text{analog}}(t) \simeq y_{\text{digital}}(t)$$

Στο μάθημα θα ασχοληθούμε μόνο με **διακριτά**, όχι αυστηρά ψηφιακά σήματα. Παρακάτω στις σημειώσεις οι δύο όροι συχνά θα χρησιμοποιούνται εναλλάξ, αλλά θα αναφέρονται πάντα στο απλώς **διακριτό** σήμα.

1.1 Ιδιότητες

Όταν μιλάμε για διακριτό σήμα, μιλάμε ουσιαστικά για μία ακολουθία, όπως τη γνωρίζουμε από τα μαθηματικά.

Πράξεις Οι πράξεις σημάτων ορίζονται όπως και στις ακολουθίες. Ασχολούμαστε με τιμές ίδιων **δεικτών** (indices) n :

1. **Πρόσθεση:** $x(n) + y(n) = z(n)$
2. **Πολλαπλασιασμός ακολουθιών:** $x(n) \cdot y(n) = z(n)$
3. **Πολλαπλασιασμός αριθμού-ακολουθίας:** $a \in \mathbb{R}, z(n) = a \cdot x(n)$

Άθροισμα γεωμετρικής προόδου Η γεωμετρική πρόοδος έχει σημαντική θέση στην ψηφιακή επεξεργασία σήματος (αφού στο αναλογικό σήμα είχαμε το σημαντικό $e^{j\omega t}$, εδώ είναι σημαντικό το $e^{j\omega n}$ που εκφράζει συνεχή πολλαπλασιασμό με το $e^{j\omega}$):

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \begin{cases} \frac{1}{1-a} & , |a| < 1 \\ \text{αποκλίνει} & , |a| > 1 \end{cases}$$

(για $a = 1$ αποκλίνει, και για $a = -1$ ταλαντεύεται. Επίσης, η παραπάνω σχέση ισχύει και για $a \in \mathbb{C}$).

Προσοχή ότι η παραπάνω σχέση ισχύει μόνο όταν το n ξεκινάει από το 0. Για παράδειγμα, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1$.

Για πεπερασμένο αριθμό όρων:

$$\sum_{n=0}^N a^n = \frac{1 - a^{N+1}}{1 - a}$$

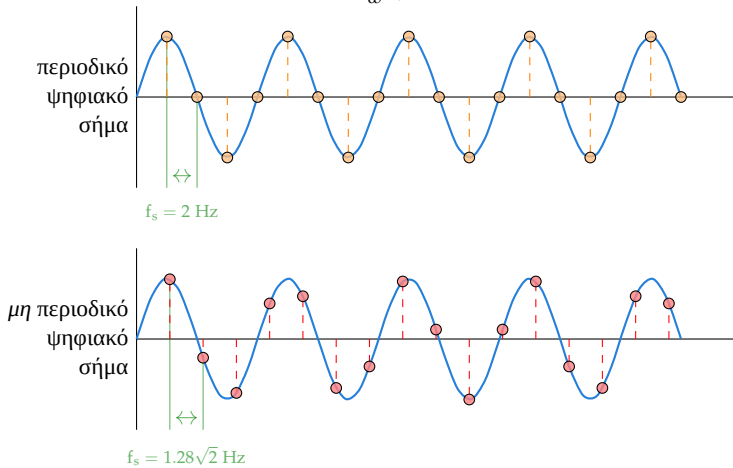
1.1.1 Χρήσιμοι τύποι ακολουθιών

Περιοδική ακολουθία Η περιοδική ακολουθία περιέχει όρους που επαναλαμβάνονται, όπως και μία περιοδική συνάρτηση. Μαθηματικά:

$$\exists N \in \mathbb{Z} : \forall n \in \mathbb{Z} : x(n) = x(n + N)$$

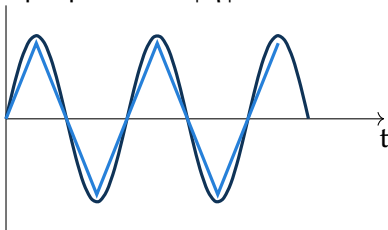
δηλαδή η περιοδική μας ακολουθία έχει μια **περίοδο** N που είναι ακέραιος αριθμός.

Προσοχή! Δεδομένου ότι η $\cos(\omega t)$ είναι *περιοδική*, θα μπορούσε κάποιος να φαντασεί ότι και η $\cos(\omega n)$ είναι *περιοδικό διακριτό σήμα*. Αν το δούμε μαθηματικά: Έστω $\exists N \in \mathbb{Z} : \cos(\omega n) = \cos(\omega(n + N)) \implies \omega n = \omega n + \omega N + k\pi \implies N = \frac{\pi}{\omega} \notin \mathbb{Z}$.



Πρακτικά, δειγματοληπτούμε σε διαφορετικά σημεία, άσχετα ίσως από την περίοδο του σήματος. Γενικότερα, όταν δειγματοληπτούμε περιοδικά αναλογικά σήματα, δεν θα παίρνουμε πάντα περιοδικά διακριτά πίσω.

Μάλιστα, κάτι άλλο περίεργο όταν δειγματοληπτούμε είναι πως για διαφορετικά αναλογικά σήματα, μπορεί να πάρουμε το ίδιο ψηφιακό!



Στο παραπάνω σχήμα, δειγματοληπτώντας στις κορυφές και στα μηδενικά, θα πάρουμε το ίδιο πράγμα από τα δύο σήματα.

Άρτιες & Περιττές ακολουθίες

άρτια (even) $\forall n \in \mathbb{Z} : x_e(n) = x_e(-n)$

περιττή (odd) $\forall n \in \mathbb{Z} : -x_o(n) = x_o(-n)$

Μπορούμε να μετατρέψουμε οποιαδήποτε ακολουθία σε ένα άρτιο και ένα περιττό μέρος:

$$x_e(n) = \frac{x(n) + x(-n)}{2}$$

$$x_o(n) = \frac{x(n) - x(-n)}{2}$$

1.1.2 Χαρακτηριστικά Μεγέθη

1. Μέση τιμή: $\overline{x(n)} = \frac{\sum_{n=0}^N x(n)}{N+1}$

2. Ενεργός τιμή: $\overline{x^2(n)} = \left[\frac{\sum_{n=0}^N x^2(n)}{N+1} \right]^{1/2}$

3. Στιγμαία ισχύς: $p(n) = x^2(n)$

4. Μέση Ισχύς: $p = \overline{p(n)} = \frac{\sum_{n=0}^N x^2(n)}{N+1}$

5. Ενέργεια: $W = \sum_{n=0}^N x^2(n) = (N+1)p$

Σημείωση: Για μιγαδικές ακολουθίες θεωρούμε το μέτρο των τιμών της ακολουθίας για τον υπολογισμό ισχύος & ενέργειας.

1.1.3 Χρήσιμες ακολουθίες

1) Εκθετική ακολουθία:

Εκθετική ακολουθία:

$$x(n) = Ae^{sn} = Aa^{(\sigma+j\omega)n}$$

για την οποία λαμβάνουμε τις εξής περιπτώσεις για τις σταθερές:

- $a = e$ και $s = \sigma < 0$:

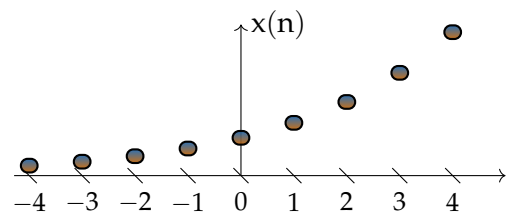
$$x(n) = Ae^{-|\sigma|n}$$

(γεωμετρική πρόοδος με λόγο $e^{-|\sigma|}$)

- $a = e$ και $s = \pm j\omega$:

$$x(n) = A [\cos(\omega n) \pm j \sin(\omega n)]$$

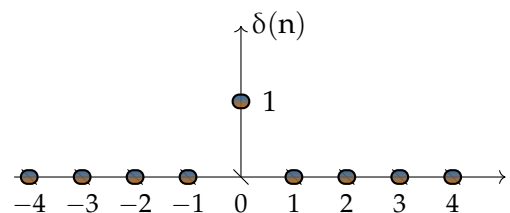
Είναι περιοδική μόνο εάν $\frac{\pi}{\omega} \in \mathbb{Q}$



2) Δέλτα του Kronecker:

Δέλτα του Kronecker:

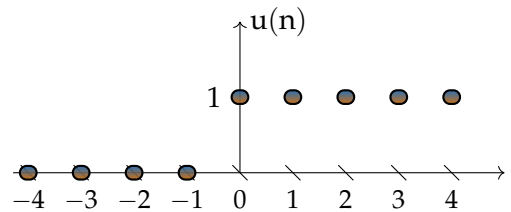
$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



3) Βηματική ακολουθία step:

Βηματική ακολουθία:

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



Μάλιστα, ισχύει ότι:

$$u(n) = \sum_{m=-\infty}^n \delta(m)$$

κάτι που μας θυμίζει αντίστοιχα από το αναλογικό σήμα ότι $u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$

1.1.4 Συνέλιξη

Μπορούμε να μετατρέψουμε τη **συνέλιξη** του αναλογικού σήματος στο ψηφιακό. Στο αναλογικό, θυμόμαστε ότι, σύμφωνα με τον ορισμό της συνέλιξης:

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

και στο ψηφιακό, μπορούμε να έχουμε κάτι αντίστοιχο:

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \delta(n - m) \tag{1}$$

Ορισμός 1.1: Συνέλιξη

Η **συνέλιξη** δύο διακριτών σημάτων ορίζεται ως εξής:

$$z(n) = x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) y(n - k)$$

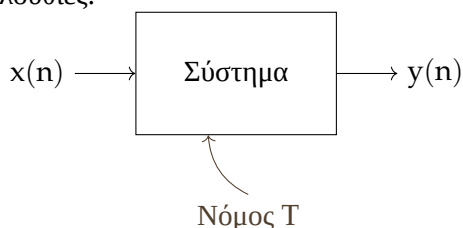
Απόδειξη σχέσης (1) Έχουμε:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \delta(n - m) = \sum_{m=-\infty}^{n-1} x(m) \cdot 0 + x(n) \cdot \delta(n - n) + \sum_{m=n+1}^{-\infty} x(m) \cdot 0 = x(n)$$

1.2 Συστήματα

Στον αναλογικό κόσμο, ένα σύστημα ήταν ένα κουτί που έπαιρνε σήματα εισόδου, τα επεξεργαζόταν, και έβγαζε σήματα εξόδου. Μαθηματικά, είναι μια απεικόνιση συναρτήσεων $x(t)$ εισόδου σε συναρτήσεις εξόδου.

Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε το **ψηφιακό σύστημα** ως ένα σύστημα που απεικονίζει ακολουθίες σε ακολουθίες.



Αντίστοιχα, ένα **υβριδικό σύστημα** απεικονίζει συναρτήσεις σε ακολουθίες. Δηλαδή έχει είσοδο αναλογικό σήμα, και έξοδο ψηφιακό.

Γραμμικό Σύστημα Μπορούμε σε αυτό το σημείο να δώσουμε τον ορισμό του **γραμμικού συστήματος** που συναντάμε συνέχεια, για ένα ψηφιακό σύστημα T . Έστω οι έξοδοι $y_1(n) = T[x_1(n)]$, $y_2(n) = T[x_2(n)]$. Το σύστημα είναι γραμμικό αν:

$$\forall x_1, x_2, \quad \forall a_1, a_2 \in \mathbb{C} : \\ a_1 T[x_1(n)] + a_2 T[x_2(n)] = T[a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)]$$

Παραδείγματα:

- Το $y(n) = ax(n) + b$ δεν είναι γραμμικό, λόγω του b .
- Το $y(n) = nx(n)$ είναι γραμμικό.

Αμετάβλητο Κατά τη Μετατόπιση Σύστημα (AKM)

$$y(n) = T[x(n)] \\ y(n - n_0) = T[x(n - n_0)]$$

δηλαδή, αν το ενοχλήσουμε τη στιγμή 2 ή τη στιγμή 50, θα δώσει την ίδια έξοδο, ξεκινώντας αντίστοιχα από τη στιγμή 2 ή τη στιγμή 50.

Παραδείγματα:

- Το $y(n) = ax(n) + b$ είναι αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση.
- Το $y(n) = nx(n)$ δεν είναι αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση, λόγω του όρου n .

Το σύστημα που προκύπτει από μία διαφορική εξίσωση είναι αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση όταν οι συντελεστές των παραγώγων του δεν εξαρτώνται από το χρόνο.

Λίγη προσοχή Χρειάζεται κάποια προσοχή στο χειρισμό AKM και γραμμικών συστημάτων.

Έστω τα συστήματα που εκφράζουν το νόμο του *Ohm* ($V = IR$) σε μια αντίσταση:

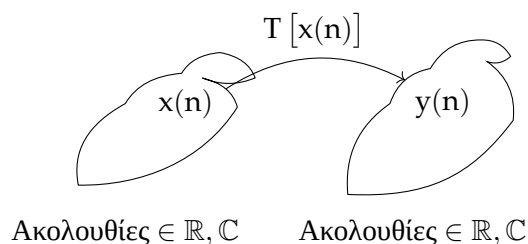
$$y_1(t) = R(t) \cdot x(t) \\ y_2(t) = R(x) \cdot x(t)$$

Στο πρώτο σύστημα η αντίσταση εξαρτάται από το χρόνο (π.χ. διάβρωση), και στο δεύτερο εξαρτάται από την είσοδο (π.χ. αύξηση θερμοκρασίας \implies αλλαγή αντίστασης για μεγαλύτερα ρεύματα).

Το πρώτο σύστημα είναι γραμμικό αλλά όχι AKM, αφού η $R(t)$ εξαρτάται από το χρόνο. Το δεύτερο σύστημα είναι AKM αλλά όχι γραμμικό, αφού η $R(x)$ εξαρτάται από την είσοδο.

Είναι **λάθος** να πούμε πως έστω $R(t) = x(t) \implies y_1(t) = x^2(t)$ (μη γραμμικό), καθώς η $R(t)$ είναι μια παράμετρος του συστήματος που δεν μπορεί να είναι ίση με τις διαφορετικές πιθανές εισόδους του. Παρομοίως, είναι **λάθος** να θεωρήσουμε ότι $R(x) = R(x(t)) = R(t) \implies y_2(t) = R(t)x(t)$ (μη AKM) (δηλαδή ότι αφού η R εξαρτάται από το x και το x εξαρτάται από το χρόνο, άρα η R εξαρτάται μόνο από το χρόνο).

Πιο αυστηρά, ένα σύστημα $y(n) = T[x(n)]$ είναι μία **απεικόνιση** από το σύνολο όλων των ακολουθιών $x(n) \in \mathbb{R}$ (ή \mathbb{C}) στο σύνολο όλων των ακολουθιών $y(n) \in \mathbb{R}$ (ή \mathbb{C})



1.2.1 Συνέλιξη

Θυμόμαστε ότι ένα ψηφιακό σήμα είναι ίσο με την ψηφιακή συνέλιξη του με την $\delta(n)$ (1):

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

Άρα, εφαρμόζοντας το σύστημα στη παραπάνω σχέση:

$$y(n) = T[x(n)] = T[x(k)\delta(n-k)]$$

Και, αν το T είναι γραμμικό:

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} T[x(k)\delta(n-k)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot T[\delta(n-k)] \end{aligned}$$

Δηλαδή η έξοδος του συστήματος σε κάποια είσοδο $x(n)$ προκύπτει από τη συνέλιξη της εισόδου με την **κρουστική απόκριση** του συστήματος (απόκριση στη $\delta(n)$), την οποία ορίζουμε:

Κρουστική απόκριση: Έστω ότι δίνουμε σε ένα σύστημα είσοδο το δέλτα του Kronecker $\delta(n)$. Τότε η έξοδος του $T[\delta(n)]$ είναι η κρουστική απόκριση, την οποία ονομάζουμε $h(n)$:

$$h(n) = T[\delta(n)]$$

Μάλιστα, αν θεωρήσουμε ότι το σύστημα είναι ΑΚΜ, ισχύει ακόμα:

$$h(n-k) = T[\delta(n-k)]$$

Άρα το παραπάνω σύστημα γράφεται:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot h(n-k)$$

Συμπέρασμα

Αν ένα σύστημα $T : x(n) \rightarrow y(n)$ είναι γραμμικό, τότε ορίζω την έννοια της **κρουστικής απόκρισης** του ως $h(n) = T[\delta(n)]$. Αν επιπροσθέτως το T είναι ΑΚΜ, τότε για οποιαδήποτε είσοδο $x(n)$ μπορώ να γράψω ότι η έξοδος θα δίνεται ως:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = x(n) * h(n) \quad (\text{συνέλιξη των διακριτών ακολουθιών})$$

Ιδιότητες Οι ιδιότητες της διακριτής συνέλιξης είναι ίδιες με αυτές του πολλαπλασιασμού:

α) **Αντιμεταθετική:** $x(n) * y(n) = y(n) * x(n)$

β) **Προσεταιριστική:** $x_1 * (x_2 * x_3) = (x_1 * x_2) * x_3$

γ) **Επιμεριστική** με πρόσθεση: $x_1 * (x_2 + x_3) = x_1 * x_2 + x_1 * x_3$

δ) **Ουδέτερο στοιχείο** η $\delta(n)$:

$$x(n) * \delta(n) = x(n)$$

Χρήσιμες πληροφορίες

- Μπορούμε να πούμε ότι ένα ψηφιακό σήμα έχει **διάρκεια**.
Αν ξεκινάει (πρώτο μη-0 στοιχείο) στο $n = D_1$ και τελειώνει (τελευταίο μη-0 στοιχείο) στο $n = U_1$, τότε λέμε ότι έχει διάρκεια:

$$T = U_1 - D_1 + 1$$

(προσοχή στον όρο +1!)

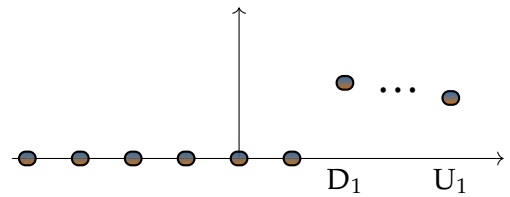
- Έστω δύο σήματα:

$x_1(n)$ έχει διάρκεια T_1

$x_2(n)$ έχει διάρκεια T_2

τότε η συνέλιξή τους έχει διάρκεια:

$$T_3 = T_1 + T_2 - 1$$



Άσκηση για το σπίτι

Φανταστείτε ότι σας δίνονται αρχές D_1 και τέλη U_1 . Για παράδειγμα, μια ακολουθία ξεκινά από το 1813 και τελειώνει στο 1980. Γνωρίζουμε ότι αν συνελίξουμε τέτοιες ακολουθίες μεταξύ τους, θα πάρουμε σήματα διάρκειας $T_3 = T_1 + T_2 - 1$.

Ζητείται να βρεθεί μια σχέση που, δεδομένων των U_1, U_2, D_1, D_2 , να βρίσκει **από ποιο σημείο** D_3 ξεκινάει το αποτέλεσμα της συνέλιξης, και σε ποιο σημείο U_3 τελειώνει.

Η απάντηση θα είναι $D_3 = D_1 + D_2$ και $U_3 = U_1 + U_2$

- Για τη συνέλιξη με τη βηματική ακολουθία $u(n)$ ισχύει:

$$x(n) * u(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)u(n-k)$$

Η $u(n-k)$ είναι 1 όταν $n-k \geq 0 \implies k \leq n$:

$$= \sum_{k=-\infty}^n x(k)u(n-k) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$$

δηλαδή η συνέλιξη με τη βηματική ακολουθία είναι ουσιαστικά το "ολοκλήρωμα" της ακολουθίας.

Παραδείγματα

Άσκηση

Να συνελιχθούν οι συναρτήσεις:

$$x_1(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) + 4\delta(n-3)$$

$$x_2(n) = \delta(n+1) - 2\delta(n) + \delta(n-1)$$

Λύση

Περιμένουμε η συνέλιξη, με βάση αυτά που είδαμε παραπάνω, να έχει διάρκεια:

$$4 + 3 - 1 = 6$$

Πραγματοποιούμε τους υπολογισμούς:

$$\begin{aligned}
 x_1 * x_2 &= x_1(n) * [\delta(n+1) - 2\delta(n) + \delta(n-1)] \\
 &= x_1(n) * \delta(n+1) - x_1(n) * (2\delta(n)) + x_1(n) * \delta(n-1) \\
 &= x_1(n+1) - 2x_1(n) + x_1(n-1) \\
 &= \delta(n+1) + 2\delta(n) + 3\delta(n-1) + 4\delta(n-2) - 2\delta(n) - 4\delta(n-1) \\
 &\quad - 6\delta(n-2) - 8\delta(n-3) + \delta(n-1) + 2\delta(n-2) + 3\delta(n-3) + 4\delta(n-4) \\
 &= \delta(n+1) - 5\delta(n-3) + 4\delta(n-4)
 \end{aligned}$$

κάτι που όντως έχει διάρκεια 6.

Άσκηση

Έστω ότι έχουμε συναρτήσεις που ξεκινούν και τελειώνουν σε διάφορα σημεία:

$$y(n) = \begin{cases} \beta^{n-n_0} & n \geq n_0 \\ 0 & n < n_0 \end{cases} \quad x(n) = \begin{cases} a^n & 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Να βρεθεί η συνέλιξή τους.

Λύση

Μπορούμε να γράψουμε τις παραπάνω συναρτήσεις απλούστερα, εκμεταλλευόμενοι τη **βηματική step function**:

$$\begin{aligned}
 y(n) &= \beta^{n-n_0} \cdot u(n - n_0) \\
 x(n) &= a^n \cdot [u(n) - u(n - N - 1)]
 \end{aligned}$$

(με προσοχή στον όρο -1 μέσα στη u)

Άρα η συνέλιξη βρίσκεται:

$$\begin{aligned}
 z(n) &= x(n) * y(n) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta^{n-n_0} u(n - n_0) a^k [u(k) - u(k - N - 1)] \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\beta^{k-n_0} u(k - n_0) \cdot a^{n-k} [u(n - k) - u(n - k - N - 1)]] \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta^{k-n_0} a^{n-k} u(k - n_0) u(n - k) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta^{k-n_0} u(k - n_0) a^{n-k} u(n - k - N - 1) \\
 &= \beta^{-n_0} a^n \sum_{k=n_0}^n \beta^k a^{-k} u(n - n_0) - \beta^{-n_0} a^n \sum_{k=n_0}^{n-N-1} \beta^k a^{-k} u(n - N - 1 - n_0)
 \end{aligned}$$

Προσπαθώντας να φτάσουμε έναν όρο γεωμετρικής προόδου, θα κάνουμε το άθροισμα να ξεκινάει από το 0:

$$= a^n \beta^{-n_0} \left[\left(\frac{\beta}{a} \right)^{n_0} \sum_{k=0}^{n-n_0} \left(\frac{\beta}{a} \right)^k u(n - n_0) - \left(\frac{\beta}{a} \right)^{n_0} \sum_{k=0}^{n-n_0-N-1} \left(\frac{\beta}{a} \right)^k u(n - N - 1 - n_0) \right]$$

και ήρθε η ώρα να εκμεταλλευτούμε τους τύπους αθροίσματος γεωμετρικής προόδου:

$$= a^{n-n_0} \left[\frac{\left(\frac{\beta}{a}\right)^{n-n_0+1} - 1}{\frac{\beta}{a} - 1} u(n - n_0) - \frac{\left(\frac{\beta}{a}\right)^{n-N-n_0} - 1}{\frac{\beta}{a} - 1} u(n - N - 1 - n_0) \right]$$

Άσκηση

Έστω η ακολουθία:

$$x(n) = a^n \forall n$$

και οι $y(n)$, $z(n)$ αυθαίρετες.

Να δειχθεί ότι:

$$[x(n)y(n)] * [x(n)z(n)] = x(n) [y(n) * z(n)]$$

Λύση

Το αριστερό μέλος της ζητούμενης σχέσης είναι:

$$\begin{aligned} [x(n)y(n)] * [x(n)z(n)] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(k)x(n-k)z(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k y(k) a^{n-k} z(n-k) \\ &= a^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k)z(n-k) \\ &= x(n) \cdot [y(n) * z(n)] \end{aligned}$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί η ενέργεια και η ισχύς του σήματος:

$$x_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

Λύση

Η ενέργεια δίνεται από τον τύπο:

$$\begin{aligned} E_{x_1} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1^2(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} u(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Έχουμε αποδείξει ότι το σήμα είναι σήμα ενέργειας, άρα σίγουρα δεν είναι σήμα ισχύος, δηλαδή η ισχύς του είναι:

$$P = 0$$

Εναλλακτικά, η ισχύς είναι η ενέργεια διά τη διάρκεια του σήματος, δηλαδή:

$$P = \frac{4/3}{\infty} = 0$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί η ενέργεια & η ισχύς του σήματος:

$$x_2(n) = e^{j(n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8})}$$

Λύση

Έχουμε:

$$E_{x_2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_2(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |1|^2 = \infty$$

Η ισχύς του σήματος είναι:

$$P_a = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x_2(n)|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2N+1}{2N+1} = 1$$

όπου $N \rightarrow \infty$ ο αριθμός στοιχείων αριστερά και δεξιά από το 0 (επομένως η ακολουθία έχει συνολικά $2N+1 \rightarrow \infty$ μη μηδενικά στοιχεία).

Άσκηση

Δίνονται τα σήματα:

$$x(n) = 2^n u(-n-1)$$

$$y(n) = 4^n u(-n-1)$$

Να βρείτε τη συνέλιξή τους:

$$x(n) * y(n) = z(n)$$

Λύση

Έχουμε:

$$\begin{aligned}z(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k) \\&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k u(-k-1) 4^{n-k} u(-(n-k)-1) \\&= 4^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{2}{4}\right)^k u(-k-1) u(-n-1+k) \\&= 4^n \sum_{k=n+1}^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k u(-1-n-1) \\&= 4^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{-n-2} \left(\frac{1}{2}\right)^k u(-1-n-1) \\&= 4^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-n-1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} u(-n-2) \\&= (2^n - 2^{2n+1}) u(-n-2)\end{aligned}$$

Άσκηση για το σπίτι

Να γίνει η συνέλιξη των δύο ακολουθιών:

$$x(n) = u(-n-1)$$

$$y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

1.2.2 Ευστάθεια

Την ευστάθεια μπορούμε να την ορίσουμε με διαφορετικούς ασύμβατους τρόπους.

Εμείς θα χρησιμοποιούμε την **ευστάθεια κατά ΦΕΦΕ (Φραγμένη Είσοδος – Φραγμένη Έξοδος)** (BIBO — Bounded Input – Bounded Output).

Ορισμός 1.2: Φραγμένη ακολουθία

Μια **φραγμένη** ακολουθία $x(n)$ είναι αυτή που δεν πάνει τιμές μέχρι το άπειρο:

$$|x(n)| < M < \infty \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Ορισμός 1.3: Ευστάθεια συστήματος κατά ΦΕΦΕ

Αν $\forall x(n)$ φραγμένη είσοδο, η έξοδος $y(n)$ ενός συστήματος είναι **φραγμένη**, τότε το σύστημα είναι **ευσταθές κατά ΦΕΦΕ (BIBO)**.

Θεώρημα 1.2: Πόρισμα

Αν γνωρίζουμε ότι ένα σύστημα είναι γραμμικό και ΑΚΜ (άρα $\exists h(n)$, δηλαδή υπάρχει η κρουστική του απόκριση), τότε το σύστημα είναι **ευσταθές** ανν:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

Απόδειξη Για τις δύο κατευθύνσεις:

- Εξετάζω ότι $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \implies$ ευστάθεια κατά BIBO:

Αφού το άθροισμα της κρουστικής απόκρισης είναι φραγμένο, θα ισχύει $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < L$ για κάποιο (μεγάλο) L .

Εστω $x(n)$ φραγμένη είσοδος $\iff |x(n)| < M \forall n$, η έξοδος θα είναι:

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \\ \implies |y(n)| &= \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| |x(n-k)| \\ \implies |y(n)| &< M \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(n)| = N \end{aligned}$$

Άρα $|y(n)| < N$, άρα η έξοδος είναι φραγμένη.

- Εξετάζω ότι BIBO $\implies \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$.

Εναλλακτικά θα εξετάσω το *αντιθετοαντίστροφο*, δηλαδή ότι $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \infty \implies$ όχι BIBO

Ορίζω μία νέα ακολουθία $x(n)$ ως εξής:

$$x(n) = \begin{cases} \frac{h^*(-n)}{|h(-n)|} & \text{αν } h(-n) \neq 0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Η $x(n)$ έχει μοναδιαίο ή μηδενικό μέτρο παντού. Επομένως είναι *φραγμένη*. Θα την πετάξουμε ως είσοδο στο σύστημα για να αποδείξουμε ότι αυτό δίνει **μη φραγμένη έξοδο, για φραγμένη είσοδο**, άρα είναι αυτό ασταθές κατά BIBO:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{h(k)h^*(k-n)}{|h(k-n)|}$$

Θέτουμε συγκεκριμένα $y = 0$:

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{h(k)h^*(k)}{|h(k)|} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \infty.$$

1.2.3 Αιτιαιότητα

Ορισμός 1.4: Αιτιατό σύστημα

Ένα σύστημα είναι **αιτιατό** αν η έξοδος εξαρτάται μόνο από **παρελθούσες τιμές** της εισόδου ή/και την τρέχουσα (παρούσα).

Μαθηματικά:

$$y(n) = f(x(k), x(\lambda), x(\xi), \dots, x(p))$$

όπου $k, \lambda, \xi, \dots, p \leq n$

Θεώρημα 1.3

Ένα γρ. ΑΚΜ σύστημα θα είναι **αιτιατό** αν:

$$h(n) = 0 \quad \forall n < 0$$

δηλαδή αν η κρουστική απόκριση είναι **αιτιατή ακολουθία**.

Απόδειξη Η έξοδος του συστήματος θα είναι:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

Εμείς θέλουμε ο δείκτης του x να μην είναι ποτέ **μεγαλύτερος** από το n , διότι σε αυτήν την περίπτωση η έξοδος θα εξαρτιόταν από το **μέλλον** του $x(n)$. Δηλαδή το $y(n)$ θα εξαρτάται από τα $x(n+1), x(n+2), \dots$. Άρα θέλουμε $k > 0$.

Αυτό εξασφαλίζεται όταν $h(k) = 0 \quad \forall k < 0$. Τότε η έξοδος θα είναι:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

Το παραπάνω βέβαια, δεδομένου του ορισμού της συνέλιξης, γράφεται και ως εξής:

$$\begin{aligned} y(n) &= h(n) * x(n) = x(n) * h(n) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^n x(k)h(n-k) \end{aligned}$$

1.2.4 Μερικοί χρήσιμοι ορισμοί για ακολουθίες

α) **Αιτιατή ακολουθία:** $x(n) = 0 \quad \forall n < 0$

β) **Ακολουθία δεξιάς πλευράς:** $\exists M \in \mathbb{Z} : x(n) = 0 \quad \forall n < M$

γ) **Ακολουθία αντιαιτιατή:** $x(n) = 0 \quad \forall n \geq 0$

δ) **Ακολουθία αριστερής πλευράς:** $\exists M \in \mathbb{Z} : x(n) = 0 \quad \forall n > M$

ε) **Ακολουθία πεπερασμένης διάρκειας:** $\exists M, N \quad M < N : \forall n < M \text{ ή } n > N : x(n) = 0$

Κάθε αιτιατή ακολουθία είναι δεξιάς πλευράς.

Κεφάλαιο 2 Συνεχής μετασχηματισμός Fourier διακριτού σήματος (Discrete-Time Fourier Transform)

2.1 Απόκριση γραμμικού ΑΚΜ συστήματος σε εκθετική είσοδο

Μελετάμε την απόκριση συστήματος σε είσοδο:

$$x(n) = a^n$$

όπου $a \in \mathbb{C}$.

Τότε η έξοδος είναι:

$$\begin{aligned} y(n) &= h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)a^{n-k} \\ &= a^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)a^{-k} \\ &= x(n) \cdot \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)a^{-k}}_{\text{αριθμός που δεν εξαρτάται από το } n} \\ &= x(n) \cdot H \end{aligned}$$

Το τελικό αποτέλεσμα δηλαδή θα είναι η είσοδος **πολλαπλασιασμένη με έναν αριθμό** που εξαρτάται από την κρουστική απόκριση του συστήματος και τη βάση a της εισόδου.

• Έστω ότι:

$$a = e^{j\omega} \implies x(n) = e^{j\omega n}$$

για $\omega \in \mathbb{R}$ μία συνεχή μεταβλητή.

Άρα η έξοδος θα είναι:

$$y(n) = x(n) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k}$$

το πλαίσιο είναι ουσιαστικά μία συνάρτηση που εξαρτάται από το $e^{j\omega}$, ή πρακτικά μόνο από το ω . Ονομάζουμε αυτήν τη συνάρτηση $H(\omega)$:

$$H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k}$$

αυτή ουσιαστικά είναι η **απόκριση συχνότητας του συστήματος**.

Υπενθυμίζουμε ότι το ω είναι **συνεχής μεταβλητή**. Μπορούμε να ορίσουμε έναν συνεχή μετασχηματισμό Fourier ως εξής:

$$x(n) \rightarrow X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

• Έστω ότι:

$$a = z$$

δηλαδή το a ανήκει οπουδήποτε στο μιγαδικό επίπεδο. Τότε:

$$y(n) = x(n) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{-k}$$

Ορισμός 2.1: Απόκριση συχνότητας

Ως **απόκριση συχνότητας** του συστήματος ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k} \\ &= H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega}) \\ &= \underbrace{|H(e^{j\omega})|}_{\text{απόκριση πλάτους}} \exp \left[\underbrace{j \arg(H(e^{j\omega}))}_{\text{απόκριση φάσης}} \right] \end{aligned}$$

2.1.1 Απόκριση συστήματος σε ημιτονοειδείς συναρτήσεις

Έστω η είσοδος:

$$x(n) = A \cos(\omega_0 n + \phi)$$

Υπενθυμίζουμε ότι η είσοδος εν γένει **δεν είναι περιοδική** (Ενότητα 1.1.1).

Αντικαθιστούμε το συνημίτονο:

$$x(n) = A \frac{e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} + e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n}}{2}$$

οπότε κατά τα παραπάνω, η έξοδος θα είναι:

$$y(n) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega_0}) + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n} H(e^{-j\omega_0})$$

Εφ' όσον θεωρηθεί ότι $h(n) \in \mathbb{R}$, τότε θα ισχύει $H(e^{j\omega_0}) = H^*(e^{-j\omega_0})$. Άρα τελικά:

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} |H(e^{j\omega_0})| \exp \left[j \arg(H(e^{j\omega_0})) \right] + \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{-j\omega_0 n} |H(e^{j\omega_0})| \exp \left[-j \arg(H(e^{j\omega_0})) \right] \\ &= A |H(e^{j\omega_0})| \cos \left(\omega_0 n + \phi + \arg(H(e^{j\omega_0})) \right) \end{aligned}$$

Άσκηση

Να βρεθεί η απόκριση συχνότητας του συστήματος με μοναδιαία απόκριση $h(n) = a^n u(n)$ για $|a| < 1$.

Λύση

Εύκολα φαίνεται ότι το σύστημα είναι αιτιατό και ευσταθές.

Για την απόκρισή του, από τον ορισμό της έχουμε:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n \end{aligned}$$

Σε αυτό το σημείο εκμεταλλευόμαστε το άθροισμα άπειρων όρων γεωμετρικής προόδου:

$$= \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \quad (\text{επειδή } |ae^{-j\omega}| = |a| < 1)$$

Άρα η απόκριση πλάτους & συχνότητας θα είναι:

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})| &= \frac{1}{(1 + a^2 - 2a \cos \omega)^{1/2}} \\ \arg(H(e^{j\omega})) &= -\arctan\left(\frac{a \sin \omega}{1 - a \cos \omega}\right) \end{aligned}$$

Άσκηση

Δίνεται γρ. ΑΚΜ σύστημα με:

$$h(n) = \frac{1}{2}\delta(n) + \delta(n-1) + \frac{1}{2}\delta(n-2)$$

Να χαρακτηριστεί και να βρεθεί η απόκριση συχνότητάς του.

Λύση

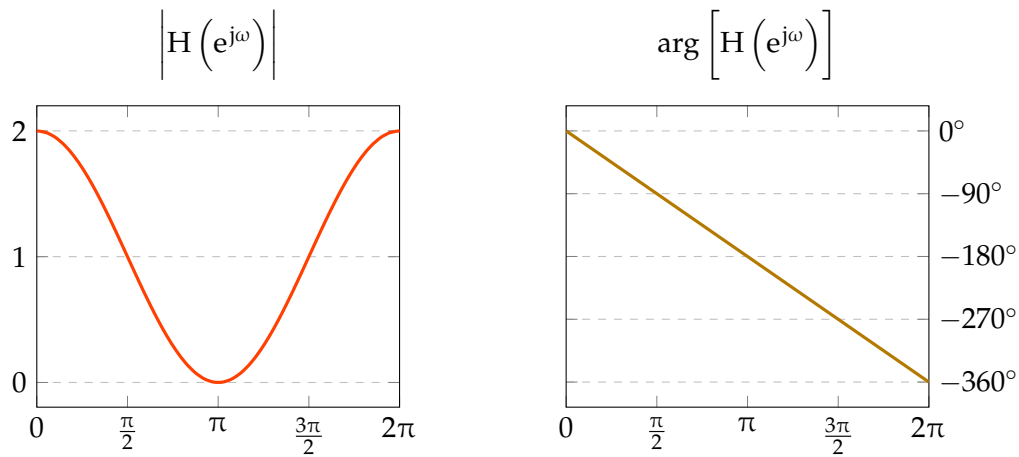
Το σύστημα είναι αιτιατό & ευσταθές.

Σύμφωνα με τον ορισμό, έχουμε:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2}\delta(n) + \delta(n-1) + \frac{1}{2}\delta(n-2) \right] e^{-j\omega n} \\ &= \frac{1}{2}e^{-j\omega 0} + e^{-j\omega 1} + \frac{1}{2}e^{-j\omega 2} \\ &= e^{-j\omega} \left[\frac{1}{2}e^{j\omega} + 1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega} \right] \\ &= e^{-j\omega} (1 + \cos \omega) \end{aligned}$$

Άρα σε πλάτος και φάση:

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})| &= |1 + \cos \omega| = 1 + \cos \omega \\ \arg[H(e^{j\omega})] &= \arg[e^{-j\omega}(1 + \cos \omega)] = \arg[e^{-j\omega}] + \underbrace{\arg[1 + \cos \omega]}_{\text{επειδή } 1 + \cos \omega \geq 0} = -\omega + 0 = -\omega \end{aligned}$$



2.2 Μετασχηματισμός Fourier

Παραπάνω ορίσαμε το συνεχή μετασχηματισμό Fourier στο διακριτό σήμα ως εξής:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$$

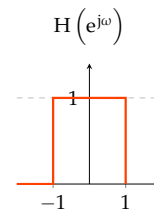
και, αν το σύστημα είναι ευσταθές κατά BIBO, έχουμε:

$$\begin{aligned} h(n) \text{ ευσταθές} &\iff \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \\ &\iff \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| |e^{-j\omega n}| < \infty \\ &\iff \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)e^{-j\omega n}| < \infty \implies \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} < \infty \implies \exists H(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

Πρακτικά, διαπιστώνουμε ότι αν το σύστημα είναι ευσταθές, τότε το σύστημα έχει απόκριση συχνότητας, δηλαδή ορίζεται ο μετασχηματισμός Fourier του.

Ένα ερώτημα που προκύπτει είναι αν ισχύει το αντίστροφο, δηλαδή αν η ύπαρξη του $H(e^{j\omega}) \implies$ ότι το σύστημα είναι ευσταθές. Για να το διαπιστώσουμε αυτό, θεωρούμε ένα αντιπαράδειγμα (χαμηλοπερατού φίλτρου):

$$H(e^{j\omega}) \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$



Το παραπάνω σύστημα **δεν είναι ευσταθές!** Πράγματι, η αντίστοιχη κρουστική απόκρισή του είναι $h(n) = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$. Το σύστημα δεν είναι αιτιατό (αφού $h(n) \neq 0 \iff n < 0$), και το άθροισμα $S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} \right|$ τείνει στο ∞ .

Επομένως, η ύπαρξη του μετασχηματισμού Fourier δεν συνεπάγεται την ευστάθεια του συστήματος.

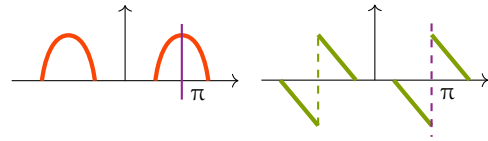
2.2.1 Ιδιότητες της απόκρισης συχνότητας

Ο συνεχής μετασχηματισμός Fourier στο διακριτό σήμα:

1. Είναι συνάρτηση **συνεχούς** μεταβλητής $\omega \in (-\infty, \infty)$
2. Η $H(e^{j\omega})$ είναι **περιοδική** με περίοδο 2π .

Επιπλέον, αν για το αρχικό σήμα στο χρόνο ισχύει $h(n) \in \mathbb{R}$:

3. Η $|H(e^{j\omega})|$ είναι **άρτια** συνάρτηση του ω και συμμετρική ως προς τον άξονα $\omega = \pi$.
4. Το $\arg H(e^{j\omega})$ είναι **περιττή** συνάρτηση του ω και αντισυμμετρική ως προς τον άξονα $\omega = \pi$.



Άσκηση για το σπίτι

Να αποδειχθούν οι ιδιότητες 3, 4. Γιατί η ιδιότητα 2 δεν ισχύει στον Μ/Σ Fourier συνεχών σημάτων;

Άσκηση

Να βρεθεί ο συνεχής Μ/Σ Fourier της:

$$h(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n < N \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Λύση

Η δοθείσα συνάρτηση γράφεται απλούστερα ως:

$$h(n) = u(n) - u(n - N)$$

Επομένως μπορούμε να υπολογίσουμε αναλυτικά το μετασχηματισμό της:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} 1e^{-j\omega n} \\ &= \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}} \\ &= \frac{e^{-j\omega N/2} (e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2})}{e^{-j\omega/2} (e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})} \\ &= e^{-j\frac{\omega}{2}(N-1)} \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \end{aligned}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})| &= \left| \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right| \\ \arg(H(e)) &= -\frac{\omega}{2}(N-1) + \text{atan2}\left(0, \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right) \end{aligned}$$

5. Μπορούμε να χωρίσουμε κάθε απόκριση συχνότητας σε ένα περιττό και ένα άρτιο κομμάτι:

$$h(n) = h_o(n) + h_e(n)$$

$$\text{όπου } h_o(n) = j \operatorname{Im} \left\{ H(e^{j\omega}) \right\} \text{ και } h_e = \operatorname{Re} \left\{ H(e^{j\omega}) \right\}$$

Μετασχηματισμός σήματος Ακριβώς όπως ορίσαμε το μετασχηματισμό της κρουστικής απόκρισης, μπορούμε να μετασχηματίσουμε και την είσοδο $x(n)$:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

Τότε, μπορούμε δοθέντος του συνεχούς Μ/Σ Fourier ενός σήματος, να γυρίσουμε πίσω στο ίδιο το σήμα:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

Εδώ δίνουμε προσοχή στο ότι **ολοκληρώνουμε** και δεν αθροίζουμε, αφού στο μετασχηματισμό αυτόν η συχνότητα είναι *συνεχής μεταβλητή*.

Απόδειξη Έχουμε:

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j\omega k} \implies \\ X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{j\omega(n-k)} \\ \implies \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-k)} d\omega = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) 2\pi \delta(n-k) = 2\pi x(n). \end{aligned}$$

Θεώρημα Parseval

Θεώρημα 2.1: Parseval's Theorem

Το θεώρημα του Parseval συνδέει την **ενέργεια** του σήματος με το Μ/Σ Fourier του:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) X^*(e^{j\omega}) d\omega$$

Άσκηση για το σπίτι

Να αποδειχθεί το θεώρημα του Parseval.

Πολλαπλασιασμός & Συνέλιξη

Θεώρημα 2.2

Η **συνέλιξη** στο χρόνο είναι **πολλαπλασιασμός** στη συχνότητα του DTFT:

$$x(k) * h(k) \leftrightarrow X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega})$$

Απόδειξη Έχουμε:

$$\begin{aligned}
 y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)x(k) \implies \\
 \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)e^{-j\omega n} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)x(k) \implies \\
 Y(e^{j\omega}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega n} h(n-k) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j\omega k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega(n-k)} h(n-k) \\
 &= X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega})
 \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 3 Μετασχηματισμός Z

Ο **μετασχηματισμός Z** είναι μια επέκταση του μετασχηματισμού Fourier στον διακριτό κόσμο, που θα μπορούσε να μοιάσει με το μετασχηματισμό Laplace στο συνεχές σήμα.

Θυμόμαστε ότι η έξοδος ενός συστήματος είναι:

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

και για μία είσοδο εκθετικής μορφής:

$$x(n) = a^n$$

η έξοδος θα είναι:

$$y(n) = a^n \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)a^{-k}}_{H(a)}$$

ή, θεωρώντας ότι το a είναι κάποιο μιγαδικό z :

$$y(n) = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{-k}$$

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε το μετασχηματισμό Z ως εξής:

Ορισμός 3.1: Μετασχηματισμός Z

Ο μετασχηματισμός Z μιας συνάρτησης $x(n)$ ορίζεται ως εξής:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

3.1 Περιοχή σύγκλισης

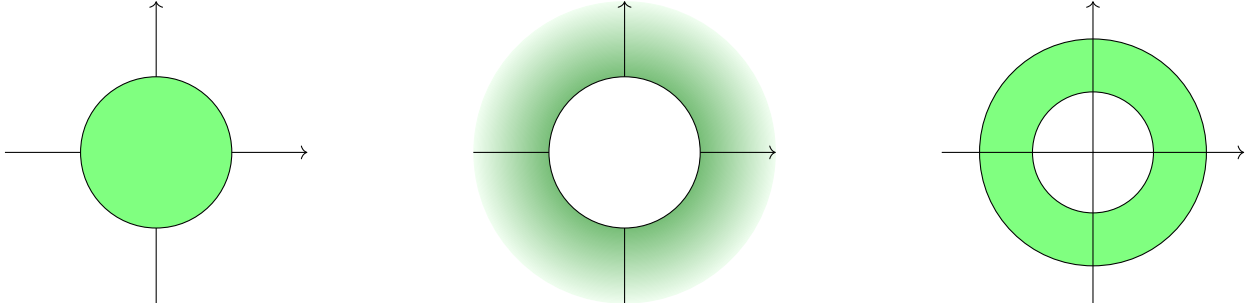
Για να έχει νόημα ο Ορισμός 3.1, πρέπει να συγκλίνει το εξής άθροισμα:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)z^{-n}| < \infty$$

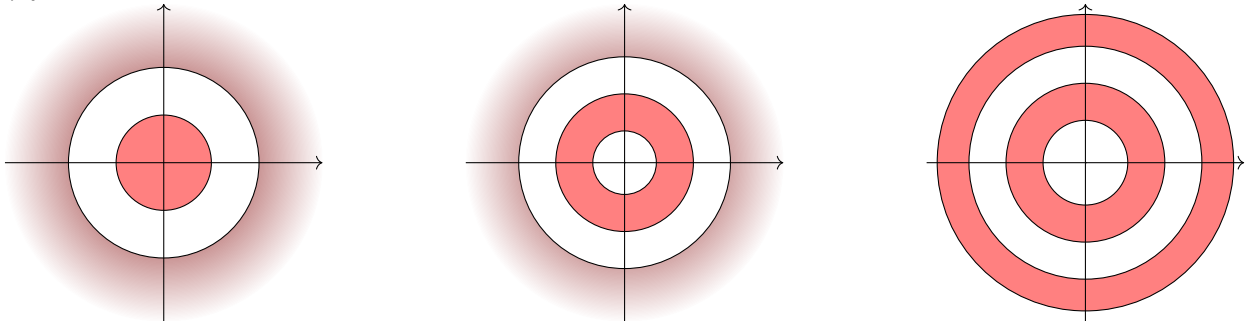
ή, ισοδύναμα:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| |z|^{-n} < \infty$$

Αυτό που καθορίζει το αν θα συγκλίνουμε είναι το μέτρο $|z|$. Οι περιοχές ίσου μέτρου ορίζουν κύκλους ή donuts στο μιγαδικό επίπεδο του z :



Από τη μιγαδική ανάλυση αποδεικνύεται πως η περιοχή σύγκλισης **δεν** μπορεί να έχει κάποια άλλη περίεργη μορφή:



Επομένως, για το $|z|$ θα ισχύει $D < |z| < U$ για κάποια D, U . Αυτά ορίζουν το **ROC** (Region Of Convergence) του μετασχηματισμού Z , χωρίς το οποίο ο μετασχηματισμός δεν έχει νόημα.

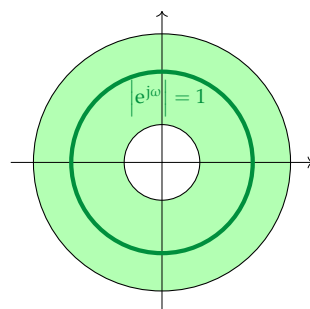
Στις περιοχές σύγκλισης θα εξετάζουμε και αν ανήκει το $|z| = \infty$. Τονίζουμε ότι ο όρος z^n **ορίζεται** για:

- $|z| < \infty$, όταν $n > 0$.
- $z \in \mathbb{C}$, όταν $n = 0$.
- $|z| > 0$, όταν $n < 0$.

Αν στην περιοχή σύγκλισης ανήκει ο **μοναδιαίος κύκλος** $|z| = 1$, τότε υπάρχει ο **μετασχηματισμός Fourier** της ακολουθίας.

Απόδειξη:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| |z|^{-n} < \infty \implies \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| |1|^{-n} < \infty \implies \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| |e^{-j\omega n}|^{-n} < \infty$$



Άσκηση

Να βρεθεί ο Z μετασχηματισμός του $x(n) = a^n u(n)$.

Λύση

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n \\ &= \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z - a} \quad \text{αν } \left|\frac{a}{z}\right| = 1 \end{aligned}$$

Άρα γράφουμε συμβολικά:

$$x(n) = a^n u(n) \xrightarrow{ZT} X(z) = \frac{z}{z - a} \quad \text{ROC : } |z| > |a|$$

Άσκηση

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Z του $x(n) = -a^n u(-n - 1)$.

Λύση

Έχουμε:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -\left(\frac{a}{z}\right)^n$$

Προσπαθώ να ξεκινήσω την άθροιση από το 0 για να εφαρμόσω τύπο γεωμετρικής προόδου:

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{a}{z}\right)^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^n \\ &= 1 - \frac{1}{1 - \frac{z}{a}} \quad \left|\frac{z}{a}\right| < 1 \\ &= \frac{1 - \frac{z}{a} - 1}{1 - \frac{z}{a}} = \frac{-\frac{z}{a}}{1 - \frac{z}{a}} = \frac{-z}{a - z} = \frac{z}{z - a} \end{aligned}$$

Εδώ παρατηρούμε κάτι ενδιαφέρον: Ο τύπος του μετασχηματισμού Z είναι **ακριβώς ίδιος** με αυτόν της προηγούμενης άσκησης, παρ' όλο που προέρχονται από διαφορετικές συναρτήσεις. Η διαφορά εδώ βρίσκεται στην **περιοχή σύγκλισης (ROC)**, που είναι διαφορετική στις δύο ασκήσεις. Εδώ φαίνεται και η σημασία του δεδομένου της περιοχής σύγκλισης.

Άσκηση

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Z της συνάρτησης:

$$x(n) = a^n u(n) - b^n u(-n - 1)$$

Λύση

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [a^n u(n) - b^n u(-n-1)] z^{-n} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} - \sum_{n=-\infty}^{-1} b^n z^{-n} \\
 &= \frac{z}{z-a} + \frac{z}{z-b} \quad \text{για } |z| > |a| \text{ και } |z| < |b|
 \end{aligned}$$

Η $X(z)$ υπάρχει αν υπάρχει η περιοχή σύγκλισης (ROC): $|a| < |z| < |b|$. Για να συμβαίνει αυτό, πρέπει να ισχύει η συνθήκη $|a| < |b|$. Διαφορετικά, δεν υπάρχει ο μετασχηματισμός.

- Για **ακολουθίες δεξιάς πλευράς** ($x(n) = 0 \iff n < n_0$, **Ενότητα 1.2.4**), αν $n_0 \geq 0$, η περιοχή σύγκλισης είναι:

$$|z| > |z_1|$$

Απόδειξη Ο μετασχηματισμός Z της ακολουθίας θα είναι:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

Υποθέτουμε ότι συγκλίνει για κάποιο $|z| = |z_1|$. Θέλουμε η σειρά $\sum_{n=n_0}^{\infty} |x(n)z_1^{-n}| < \infty$ να συγκλίνει.

Τότε, για ένα τυχαίο $|z| > |z_1|$, θα ισχύει

$$|z| > |z_1| \implies |z|^{-n} < |z_1|^{-n} \implies |x(n)||z^{-n}| < |x(n)||z_1^{-n}| < \infty$$

αν $n \geq 0$. Δηλαδή, η ακολουθία θα συγκλίνει για οποιοδήποτε $|z|$ μεγαλύτερο κάποιου $|z_1|$.

– Αν αντίθετα, $n_0 < 0$:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} x(n)z^{-n} = \underbrace{\sum_{n=n_0}^{-1} x(n)z^{-n}}_{\text{συγκλίνει ως πεπερασμένο}} + \overbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}}^{\text{συγκλίνει}}$$

που οδηγεί σε ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα, πλην του κύκλου στο άπειρο:

$$|z_1| < |z| < \infty$$

- Για **ακολουθίες αριστερής πλευράς** ($x(n) = 0 \iff n > n_0$), τότε (αντίστοιχα με παραπάνω):

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_0} x(n)z^{-n}$$

Τότε θα ισχύει:

$$\begin{cases} n_0 \leq 0 & \implies \text{ROC} = |z| < |z_1| \\ n_0 > 0 & \implies \text{ROC} = 0 < |z| < |z_1| \end{cases}$$

- Για ακολουθίες πεπερασμένου μήκους ($x(n) = 0 \forall n < N, n > M, M > N$), ο μετασχηματισμός Z θα είναι:

$$X(z) = \sum_{n=N}^M x(n)z^{-n}$$

Εδώ δεν έχουμε άπειρο άθροισμα. Κινδυνεύουμε με απειρισμούς μόνον όταν $z = 0$ ή $z = \infty$. Πιο συγκεκριμένα:

$$\begin{cases} \text{Av } N < 0 \ \& \ M > 0 & \implies \text{ROC: } 0 < |z| < \infty \\ \text{Av } N > 0 \ \& \ M > 0 & \implies \text{ROC: } 0 < |z| \\ \text{Av } N < 0 \ \& \ M < 0 & \implies \text{ROC: } |z| < \infty \end{cases}$$

3.2 Αντίστροφος μετασχηματισμός Z

Ο ευθύς μετασχηματισμός Z είναι:

$$X(z) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad \mathcal{R}_{X(z)}$$

Αποδεικνύεται ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z είναι:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C \in \mathcal{R}_{X(z)} z^{n-1}} X(z)z^{n-1} dz$$

Η παραπάνω σχέση βασίζεται στο ολοκλήρωμα του Cauchy, $\frac{1}{2\pi j} \oint z^{-k-1} dz = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$

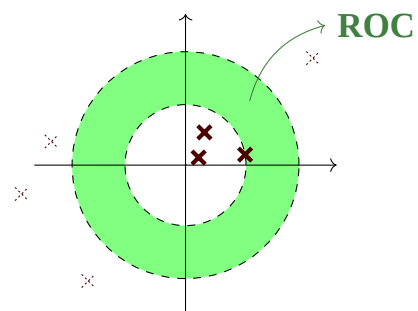
3.3 Μέθοδοι υπολογισμού αντίστροφου μετασχηματισμού Z

3.3.1 Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Με βάση τη μιγαδική ανάλυση, γνωρίζουμε ότι:

$$x(n) = \sum \left\{ \text{Res} \left[X(z)z^{n-1} \right] \right\}$$

για τους πόλους εντός του $C \in \mathcal{R}_{X(z)} z^{n-1}$.

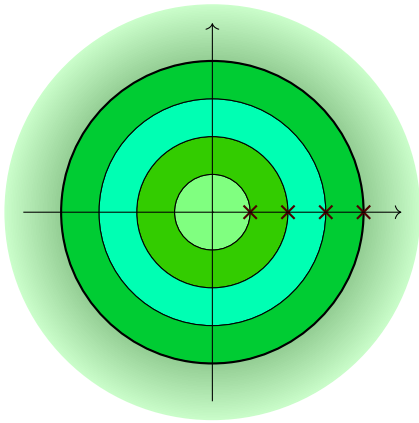


Η παραπάνω σχέση συμπεριλαμβάνει και πόλους που βρίσκονται εκτός των ορίων περιοχής σύγκλισης αλλά μέσα στα όρια του κύκλου που αυτή ορίζει.

Παράδειγμα Ένα σύστημα έχει 4 πόλους. Πόσες είναι οι μέγιστες δυνατές περιοχές σύγκλισης;

Απάντηση Ένας πόλος, ως απομονωμένο ανώμαλο σημείο, δεν μπορεί να βρίσκεται μέσα στην περιοχή σύγκλισης.

Τοποθετούμε τους πόλους στο πραγματικό επίπεδο για ευκολία, και θεωρούμε περιοχές σύγκλισης με ανοιχτά όρια. Επειδή μια περιοχή σύγκλισης πρέπει να έχει πόλο στα όριά της, αλλά δεν μπορεί να περιέχει πόλο, οι δυνατές επιλογές θα μοιάζουν ως εξής:



Άρα έχουμε 5 δυνατότητες για περιοχή σύγκλισης.

Υπολογισμός ολοκληρωτικών υπολοίπων Σύμφωνα με τη μιγαδική ανάλυση, τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα που ψάχνουμε μπορούν να βρεθούν ως εξής:

$$\text{Res} \left[X(z)z^{n-1} @ z = z_0 \right] = \frac{1}{(s-1)!} \left. \frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}} A(z) \right|_{z=z_0}$$

όπου z_0 ο πόλος, s η πολλαπλότητά του, και:

$$A(z) = X(z)z^{n-1}(z - z_0)^s$$

Άσκηση

Δίνεται ο μετασχηματισμός Z μιας ακολουθίας:

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| > |a|$$

Ποιά είναι η αρχική ακολουθία $x(n)$;

Λύση

Το $X(z)$ γράφεται και ως:

$$X(z) = \frac{z}{z - a}$$

Εξετάζω πόσο κάνει το $X(z)z^{n-1}$:

$$X(z)z^{n-1} = \frac{z^n}{z - a}$$

που έχει **πόλο** στο $z_0 = a$ με **πολλαπλότητα** $s_0 = 1$. Στην περίπτωση που $n = -k < 0$, προστίθεται και ένας παραπάνω πόλος $z_1 = 0$ πολλαπλότητας $s_1 = |n| = k$.

- Αν $n \geq 0$, τότε: έχουμε **1 πόλο** στο $z_0 = a$ πολλαπλότητας $s_0 = 1$. Άρα από τη θεωρία (Σελίδα 28):

$$\begin{aligned} x(n) &= \text{Res} \left[\frac{z^n}{z - a} @ z = a \right] = \frac{1}{(s_0 - 1)!} \left. \frac{d^{s_0-1}}{dz^{s_0-1}} z^n \right|_{z=a} \\ &= \frac{1}{(1 - 1)!} \left. \frac{d^0}{dz^0} z^n \right|_{z=a} = a^n \end{aligned}$$

- Αν $n < 0$, τότε έχουμε 1 πόλο $z_0 = a$, $s_0 = 1$, και επιπλέον k πόλους $z_1 = 0$, $s_0 = k$:

$$\begin{aligned} x(n) &= \text{Res} \left[\frac{1}{(z-a)z^{-n}} @ z=a \right] = \frac{1}{z^{-n}} \Big|_{z=a} = a^n \\ &+ \text{Res} \left[\frac{1}{(z-a)z^{-n}} @ z=0 \right] = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \frac{1}{z-a} \Big|_{z=0} \\ &= a^n + \frac{1}{(k-1)!} (-1)^{k-1} \frac{1}{(z-a)^k} \Big|_{z=0} \\ &= a^n + (-1)^{k-1} \frac{1}{(-a)^k} = a^n + (-1)^{k-1} (-a)^n = a^n - a^n = 0 \end{aligned}$$

Τελικά, το αποτέλεσμα στο οποίο καταλήξαμε είναι το εξής:

$$\left. \begin{array}{l} n \geq 0 \quad x(n) = a^n \\ n < 0 \quad x(n) = 0 \end{array} \right\} \implies x(n) = a^n u(n)$$

ένα αποτέλεσμα ίδιο με αυτό της "αντίστροφης" άσκησης που λύσαμε προηγουμένως (Σελίδα 25).

Άσκηση

Να βρεθεί το αρχικό σήμα του μετασχηματισμού:

$$X(z) = \frac{z(z-b) + z(z-a)}{(z-a)(z-b)} \quad \mathcal{R}_x : |a| < |z| < |b|$$

Λύση

Αν και η άσκηση λύνεται άμεσα μετά την παρατήρηση ότι $X(z) = \frac{z}{z-a} + \frac{z}{z-b}$, εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τη μεθοδολογία των ολοκληρωτικών υπολοίπων.

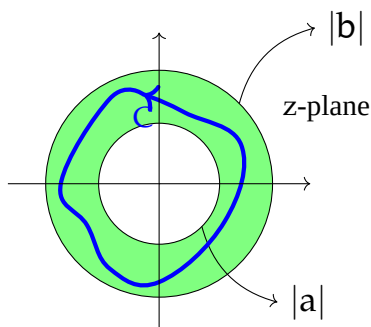
Έχουμε:

$$X(z)z^{n-1} = \frac{(2z-a-b)}{(z-a)(z-b)} z^n$$

Άρα:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{(2z-a-b)}{(z-a)(z-b)} z^n dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_C I(z) dz$$

όπου ορίσαμε για ευκολία $I(z) = \frac{(2z-a-b)}{(z-a)(z-b)} z^n$.



Το $I(z)$ έχει πόλους z πολλαπλότητας s :

$$I(z) \rightarrow \begin{cases} z_0 = a & s_0 = 1 \\ z_1 = b & s_1 = 1 \end{cases}$$

- Αν $n \geq 0$, τότε:

$$x(n) = \text{Res} [I(z) @ z = a] = \left. \frac{z^n(2z - a - b)}{(z - b)} \right|_{z=a} = \frac{a^n(2a + a - b)}{(a - b)} = a^n$$

Εδώ δεν συμπεριλάβαμε τον πόλο $z_1 = b$ επειδή είναι εκτός του χωρίου που περικλείεται από την περιοχή σύγκλισης.

Επομένως:

$$x(n) = a^n \quad \text{όταν } n \geq 0$$

- Αν $n < 0$, τότε οι πόλοι του $I(z)$, λόγω του όρου z^n , είναι:

$$I(z) \rightarrow \begin{cases} z_0 = a & s_0 = 1 \\ z_1 = b & s_1 = 1 \\ z_2 = 0 & s_2 = -n = k \end{cases}$$

Άρα η ακολουθία είναι:

$$x(n) = \text{Res} [I(z) @ z = a] + \text{Res} [I(z) @ z = 0]$$

επειδή $a, 0 \in \text{int}(C)$, ενώ $b \notin \text{int}(C)$

$$= \left. \frac{2z - a - b}{z^{-n}(z - b)} \right|_{z=a} + \frac{1}{(-n - 1)!} \left. \frac{d^{-n-1}}{dz^{-n-1}} \left(\frac{2z - a - b}{(z - a)(z - b)} \right) \right|_{z=0}$$

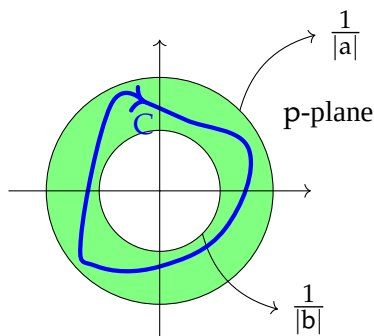
Για να υπολογίσουμε τη "δύσκολη" παραπάνω παράγωγο, εφαρμόζουμε ένα τρικ. Θέτουμε $z = 1/\rho$, οπότε $dz = -\frac{1}{\rho^2} d\rho$, και η περιοχή σύγκλισης γίνεται $|a|^{-1} > |\rho| > |b|^{-1}$. Και τότε:

$$\begin{aligned} I(z) dz &= -\frac{\rho^{-n}(2\rho^{-1} - a - b)}{(\rho^{-1} - a)(\rho^{-1} - b)} \frac{1}{\rho^2} d\rho \\ &= -\frac{\rho^{-n}(2\rho^{-1} - a - b)}{(1 - a\rho)(1 - b\rho)} d\rho \end{aligned}$$

Άρα τελικά:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \left[-\frac{\rho^{-n}(2\rho^{-1} - a - b)}{(1 - a\rho)(1 - b\rho)} \right] d\rho$$

Στο νέο υπολογισμό με βάση το ρ και όχι το z , έχει αλλάξει το επίπεδο όπου προβάλλουμε τους πόλους. Η περιοχή σύγκλισης μοιάζει πάλι με donut, αλλά η καμπύλη C διαγράφεται τώρα ωρολογιακά και όχι αντιωρολογιακά, λόγω της αλλαγής μεταβλητής $dz = -\frac{1}{\rho^2} d\rho$.



Άρα:

$$\begin{aligned}
 x(n) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \left[\frac{\rho^{-n}(2\rho^{-1} - a - b)}{(1 - a\rho)(1 - b\rho)} \right] d\rho \\
 &= \text{Res} \left[\frac{\rho^{-n}(2\rho^{-1} - a - b)}{(1 - a\rho)(1 - b\rho)} @ \rho = \frac{1}{b} \right] \\
 &= \frac{1}{ab} \left[\frac{\rho^{-n-1} [2 - (a + b)\rho]}{\left(\rho - \frac{1}{a}\right)} \right] \Bigg|_{\rho=1/b} = \frac{1}{ab} \left[\frac{\left(\frac{1}{b}\right)^{-n-1} \left[2 - \frac{a+b}{b}\right]}{\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)} \right] \\
 &= \frac{b^n (2b - a - b)}{a - b} = \frac{b - a}{a - b} = -b^n
 \end{aligned}$$

Άρα τελικά:

$$x(n) = -b^n \text{ για } n < 0$$

Επομένως, η ζητούμενη ακολουθία είναι:

$$x(n) = a^n u(n) - b^n u(-n - 1)$$

3.3.2 Μέθοδος συνεχούς διαίρεσης

Άσκηση

Δίνεται ο Μ/Σ Ζ:

$$X(z) = \frac{2z^2 - (a + b)z}{z^2 - (a + b)z + ab} \quad |a| < |b| < |z|$$

Να βρεθεί η $x(n)$.

Λύση

Η μέθοδος αυτή απαιτεί ένα είδος διαίρεσης των πολυωνύμων $2z^2 - (a + b)z$ και $z^2 - (a + b)z + ab$. Το πηλίκο θα προκύψει $2 + (a + b)z^{-1} + (a^2 + b^2)z^{-2} + (a^3 + b^3)z^{-3} + \dots$, κάτι που μοιάζει με τον ορισμό του μετασχηματισμού Ζ: $\sum x(n)z^{-n}$, επομένως η $x(n) = (a^n + b^n) u(n)$.

Αντίστοιχα, για περιοχή σύγκλισης $|z| < |a| < |b|$, θα βρίσκαμε $x(n) = -(a^n + b^n) u(-n - 1)$. Όμως δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο αυτήν για περιοχές της μορφής $|a| < |z| < |b|$.

3.4 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Ζ

1) Γραμμικότητα

Έστω Ν σε πλήθος ακολουθίες $x_k(n)$ και οι μετασχηματισμοί Ζ τους:

$$x_k(n) \xrightarrow{ZT} X_k(z) \quad k = 1, 2, \dots, N$$

και έστω μία ακολουθία $y(n)$ που είναι γραμμικός συνδυασμός των παραπάνω:

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k x_k(n) \quad a_k \in \mathbb{C} \text{ σταθερές}$$

Τότε, η παραπάνω ακολουθία θα έχει μετασχηματισμό Z:

$$Y(z) = \sum_{k=1}^N a_k X_k(z)$$

ο οποίος έχει περιοχή σύγκλισης:

$$\mathcal{R}_{Y(z)} \supseteq \bigcap_{k=1}^N \mathcal{R}_{X_k(z)}$$

δηλαδή η περιοχή σύγκλισης του γραμμικού συνδυασμού είναι τουλάχιστον η τομή όλων των περιοχών σύγκλισης των επιμέρους ακολουθιών. Ο όρος τουλάχιστον (ή αντίστοιχα το σύμβολο \supseteq) εκφράζουν ότι η περιοχή σύγκλισης της $Y(z)$ μπορεί να είναι μεγαλύτερη των επιμέρους. Αυτό μπορεί για παράδειγμα να συμβαίνει όταν προσθέτουμε τις ακολουθίες με $ZT: \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-1} = 0$, ή τις ακολουθίες $\frac{z}{z-1} - \frac{1}{z-1} = \frac{z-1}{z-1} = 1$ όπου απαλείφεται ο πόλος.

2) Μετατόπιση

Έστω η ακολουθία $x(n)$ και ο μετασχηματισμός της:

$$x(n) \xrightarrow{ZT} X(z) \quad \mathcal{R}_x$$

και έστω ότι τη μετατοπίζουμε κατά $n_0 \in \mathbb{Z}$ (είναι απαραίτητο ο n_0 να είναι **ακέραιος**)

$$\boxed{y(n) = x(n - n_0)} \xrightarrow{ZT} \boxed{z^{-n_0} X(z)}$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned} Y(z) = ZT \{y(n)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n - n_0) z^{-n} \stackrel{n-n_0 \leftarrow n}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-(n+n_0)} \\ &= z^{-n_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = z^{-n_0} X(z) \end{aligned}$$

Η περιοχή σύγκλισης εξαρτάται από το ποιούς πόλους εξαφανίζει και εμφανίζει το z^{-n_0} . Είναι ίδια με την αρχική, ή συμπεριλαμβάνονται ή αφαιρούνται τα σημεία $z = 0$ ή $z = \infty$.

3) Πολλαπλασιασμός με εκθετική ακολουθία (εκθετικό σήμα)

Δίνεται η ακολουθία:

$$x(n) \xrightarrow{ZT} X(z) \quad \mathcal{R}_x : r_- < |z| < r_+$$

και την πολλαπλασιάζουμε με ένα εκθετικό a^n όπου $a \in \mathbb{C}$:

$$\boxed{y(n) = a^n x(n)} \xrightarrow{ZT} \boxed{Y(z) = X\left(\frac{z}{a}\right)}$$

Απόδειξη Έχουμε:

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

Για να εκτελέσουμε την τελευταία πράξη, πρέπει να ισχύει:

$$\left|\frac{z}{a}\right| \in \mathcal{R}_x \implies r_- < \left|\frac{z}{a}\right| < r_+ \implies \boxed{|a|r_- < |z| < |a|r_+}$$

4) Παραγωγή του μετασχηματισμού

$$nx(n) \xrightarrow{\mathcal{ZT}} -z \frac{dX(z)}{dz}$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned} \mathcal{ZT}\{nx(n)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left(-z \frac{dz^{-n}}{dz}\right) \\ &= -z \frac{d}{dz} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \right) = -z \frac{d}{dz} X(z) \end{aligned}$$

5) Χρονική αντιστροφή

Για την ακολουθία $x(n)$:

$$x(n) \xrightarrow{\mathcal{ZT}} X(z) \quad \mathcal{R}_x : r_- < |z| < r_+$$

$$y(n) = x(-n) \xrightarrow{\mathcal{ZT}} Y(z) = X(z^{-1})$$

Απόδειξη Έχουμε:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)z^{-n} \stackrel{-n \leftarrow n}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) (z^{-1})^n \\ &= X(z^{-1}) \end{aligned}$$

Με την απαίτηση για το πεδίο σύγκλισης:

$$r_- < |z^{-1}| < r_+ \implies \frac{1}{r_+} < |z| < \frac{1}{r_-}$$

6) Συνέλιξη στο χρόνο

Έχουμε τη συνέλιξη δύο ακολουθιών x και y :

$$x(n) \xrightarrow{\mathcal{ZT}} X(z), \quad \mathcal{R}_x$$

$$y(n) \xrightarrow{\mathcal{ZT}} Y(z), \quad \mathcal{R}_y$$

$$w(n) = x(n) * y(n) \xrightarrow{\mathcal{ZT}} W(z) = X(z)Y(z), \quad \mathcal{R}_W \supseteq \mathcal{R}_x \cap \mathcal{R}_y$$

7) Γινόμενο σημάτων Έχουμε τον πολλαπλασιασμό δύο ακολουθιών x και y :

$$x(n) \xrightarrow{\mathcal{ZT}} X(z), \quad \mathcal{R}_x$$

$$y(n) \xrightarrow{\mathcal{ZT}} Y(z), \quad \mathcal{R}_y$$

Για τον υπολογισμό του στο πεδίο Z , υπολογίζουμε, με βάση τον αντίστροφο μετασχηματισμό Z (Ενότητα 3.2):

$$\begin{aligned} W(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{1}{2\pi j} \oint_{C:v \in \mathcal{R}_Y} Y(v)v^{n-1} dv z^{-n} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{C:v \in \mathcal{R}_Y} Y(v)v^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)v^n z^{-n} dv \\ &\stackrel{\substack{z \in \mathcal{R}_x \\ \frac{z}{v} \in \mathcal{R}_x}}{=} \frac{1}{2\pi j} \oint_{C:v \in \mathcal{R}_Y} Y(v)v^{-1} X\left(\frac{z}{v}\right) dv \\ W(z) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{C:\substack{v \in \mathcal{R}_Y \\ \frac{z}{v} \in \mathcal{R}_x}} Y(v)v^{-1} X\left(\frac{z}{v}\right) dv \end{aligned}$$

Δεδομένων των περιορισμών, πρέπει:

$$\left. \begin{array}{l} r_-^Y < |v| < r_+^Y \\ r_-^X < \left| \frac{z}{v} \right| < r_+^X \end{array} \right\} \mathcal{R}_W : r_-^X r_-^Y < |z| < r_+^Y r_+^X$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Z του:

$$x(n) = \delta(n)$$

Λύση

Έχουμε:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n)z^{-n} = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Z του:

$$x(n) = \delta(n - n_0)$$

Λύση

Έχουμε:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n - n_0)z^{-n} = z^{-n_0}$$

Η περιοχή σύγκλισης εξαρτάται από το n_0 και είναι (Σελίδα 24):

$$\begin{cases} n_0 > 0 : & 0 < |z| \\ n_0 < 0 : & |z| < \infty \end{cases}$$

Άσκηση

Να βρεθεί ο Μ/Σ Ζ:

$$x(n) = u(n)$$

Λύση

Έχουμε:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Πρέπει $|z^{-1}| < 1$, άρα η περιοχή σύγκλισης είναι ROC: $|z| > 1$.

Άσκηση

Βρείτε Μ/Σ Ζ:

$$x(n) = u(n - n_0)$$

Λύση

Εκμεταλλευόμενοι την ιδιότητα του μετασχηματισμού Ζ, έχουμε:

$$\begin{aligned} X(z) &= z^{-n_0} \cdot \mathcal{ZT}\{u(n)\} = z^{-n_0} \frac{z}{z-1} \\ &= \frac{z^{-n_0+1}}{z-1} \end{aligned}$$

Για την περιοχή σύγκλισης, έχουμε $|z| > 1$ από το μετασχηματισμό της $u(t)$.

- Όταν ο εκθέτης είναι αρνητικός, δηλαδή $-n_0 + 1 < 0 \iff n_0 > 1$, έχουμε πόλους στο 0 και στο 1. Επειδή αποκλείεται (λόγω του $|z| > 1$) να βρισκόμαστε μέσα από τον μοναδιαίο κύκλο, αναγκαστικά το \mathcal{R}_X θα είναι $|z| > 1$.
- Για $-n_0 + 1 > 0 \iff n_0 < 1$, έχουμε τον περιορισμό $1 < |z| < \infty$ (βλ. Σελίδα 24).

Άσκηση

Αν:

$$X(z) = \frac{z}{3z^2 - 4z + 1}$$

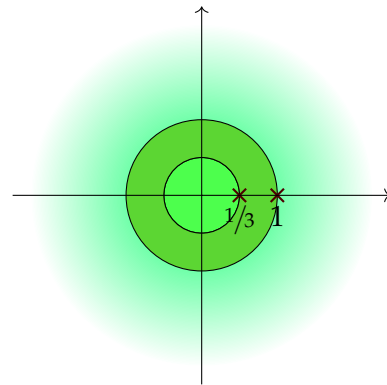
να βρεθεί η $x(n)$ για κάθε πιθανή ROC.

Λύση

Πρώτα πρέπει να βρούμε τους **πόλους** της συνάρτησης, για να υπολογίσουμε τις πιθανές ROC.

Έχουμε:

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{z}{3\left(z^2 - \frac{4}{3}z + \frac{1}{3}\right)} = \frac{z}{3(z-1)\left(z - \frac{1}{3}\right)} \\ &= z \left[\frac{1}{(z-1)\left(z - \frac{1}{3}\right)} \right] \\ &= z \left(\frac{1}{2z-1} - \frac{1}{2z-1/3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z-1/3} \end{aligned}$$



Επομένως έχουμε πόλους στα σημεία $1, \frac{1}{3}$.

Για να υπολογίσουμε τα παρακάτω, χρησιμοποιούμε τους μετασχηματισμούς:

$$\begin{aligned} u(n) \xrightarrow{ZT} U(z) &= \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1 \\ a^n u(n) \xrightarrow{ZT} U(z) &= \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a| \\ -u(-n-1) \xrightarrow{ZT} U(z) &= \frac{z}{z-1}, \quad |z| < 1 \\ -a^n u(-n-1) \xrightarrow{ZT} U(z) &= \frac{z}{z-a}, \quad |z| < |a| \end{aligned}$$

Προσοχή στο ότι κρατήσαμε το z έξω από το σπάσιμο σε μερικά κλάσματα, έτσι ώστε να μπορούμε να εφαρμόσουμε τους παραπάνω τύπους που έχουν το z στον αριθμητή.

- **Av ROC:** $|z| > 1$

Τότε, δεδομένου του μετασχηματισμού Z της $u(n)$, έχουμε:

$$x(n) = \frac{1}{2}u(n) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

- **Av ROC:** $|z| < \frac{1}{3}$:

$$x(n) = -\frac{1}{2}u(-n-1) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n u(-n-1)$$

- **Av ROC:** $\frac{1}{3} < |z| < 1$:

$$x(n) = -\frac{1}{2}u(-n-1) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

Άσκηση

Να βρεθεί η $x(n)$ του μετασχηματισμού Z :

$$X(z) = \frac{z+1}{3z^2-4z+1} \quad |z| > 1$$

Λύση

Έχουμε:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z+1}{3z(z-1)\left(z-\frac{1}{3}\right)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} + \frac{\Gamma}{z-\frac{1}{3}}$$

όπου προκύπτει $A = 1$, $B = 1$, $\Gamma = -2$, άρα:

$$X(z) = 1 + \frac{z}{z-1} - 2\frac{z}{z-\frac{1}{3}} \implies |z| > 1$$

$$x(n) = \delta(n) + u(n) - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

Εναλλακτικά, χωρίς να διαιρέσουμε αυθαίρετα με το z :

$$X(z) = \frac{z+1}{3z^2-4z+1} = \frac{z}{3z^2-4z+1} + \frac{1}{3z^2-4z+1} \implies |z| > 1$$

$$x(n) = \frac{1}{2}u(n) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) + \frac{1}{2}u(n-1) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u(n-1)$$

Εδώ, αν και φαινομενικά βγάλαμε διαφορετικά αποτελέσματα με τους δύο διαφορετικούς τρόπους προσέγγισης του προβλήματος, στην πραγματικότητα τα αποτελέσματα είναι ίδια. Πράγματι, θέτοντας $n = 0, n = 1, \dots$ θα πρέπει να πάρουμε το ίδιο αποτέλεσμα.

Άσκηση

Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z του:

$$X(z) = \frac{z^4 + z^2}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)} \quad \frac{1}{2} < |z| < \infty$$

Λύση

Αυθαίρετα διαιρούμε με το z , και έχουμε:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z^3 + z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)} = z + \frac{3}{4} + \frac{\frac{23}{16}z - \frac{3}{32}}{z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}}$$

$$= z + \frac{3}{4} + \frac{5/2}{z-1/2} - \frac{17/6}{z-1/4} \implies$$

$$X(z) = z^2 + \frac{3}{4}z + \frac{5}{2}\frac{z}{z-1/2} - \frac{17}{16}\frac{z}{z-1/4} \implies \infty > |z| > \frac{1}{2}$$

$$x(n) = \delta(n+2) + \frac{3}{4}\delta(n+1) + \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \frac{17}{16}\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

Άσκηση

Να βρείτε το μετασχηματισμό Z της ακολουθίας:

$$x(n) = (n-2)a^{(n-2)} \cos(\omega_0(n-2)) u(n-2)$$

Λύση

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{x(n)\} &= z^{-2} \mathcal{Z}\{na^n \cos(\omega_0 n) u(n)\} \\ &= z^{-2} \left[-z \frac{d}{dz} \left[\mathcal{Z}\{a^n \cos(\omega_0 n) u(n)\} \right] \right] \\ &= z^{-2} \left[-z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}\{\cos(\omega_0 n) u(n)\} \Big|_{z=\frac{z}{a}} \right] \end{aligned}$$

Θέτουμε $\phi(n) = \cos(\omega_0 n) u(n)$, και θα βρούμε την $\Phi(z)$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} u(n) \cos(\omega_0 n) &= \frac{e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}}{2} u(n) \\ u(n) e^{j\omega_0 n} &\xrightarrow{\mathcal{ZT}} \frac{1}{1 - \frac{e^{j\omega_0}}{z}} = \frac{z}{z - e^{j\omega_0}} \quad \left| \frac{e^{j\omega_0}}{z} \right| < 1 \implies |z| > 1 \\ u(n) e^{-j\omega_0 n} &\xrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}} \quad |z| > 1 \\ u(n) \cos(\omega_0 n) &\xrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{2} \left[\frac{z}{z - e^{j\omega_0}} + \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}} \right] = \frac{z^2 - z \cos \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1} \quad |z| > 1 \end{aligned}$$

Άρα τελικά:

$$X(z) = -z^{-1} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2 - z \cos \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1} \Big|_{z=\frac{z}{a}} \right) \quad |z| > |a|$$

Χρήσιμοι τύποι

Στις παραπάνω ασκήσεις χρησιμοποιούσαμε συνεχώς τους τύπους:

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a| \xrightarrow{\mathcal{ZT}} x(n) = a^n u(n) \\ X(z) &= \frac{z}{z-a}, \quad |z| < |a| \xrightarrow{\mathcal{ZT}} x(n) = -a^n u(-n-1) \end{aligned}$$

Κλάσματα μεγαλύτερης πολλαπλότητας:

$$X(z) = \frac{z}{(z-a)^k}, \quad |z| > |a| \quad k \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$$

$$x(n) = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-(k-2))}{(k-1)!} a^{n-k+1} u(n)$$

Απόδειξη Έχουμε:

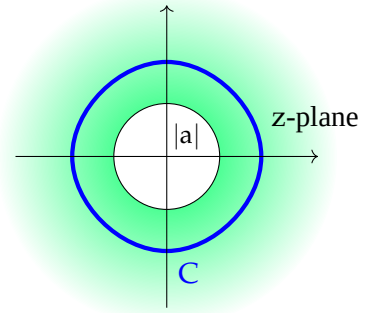
$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{C \in \text{ROC}} X(z) z^{n-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z^n}{(z-a)^k} dz \end{aligned}$$

Λαμβάνουμε περιπτώσεις για τη στιγμή n :

- Αν $n \geq 0$ τότε υπάρχει ένας πόλος στο $z_0 = a$ με πολλαπλότητα $s_0 = k$.

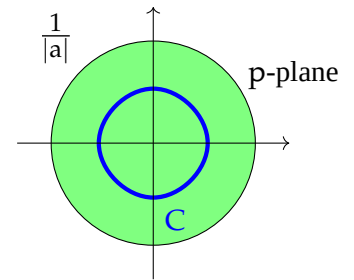
Με βάση το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων, έχουμε:

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{(k-1)!} \left. \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [z^n] \right|_{z=a} \\ &= \frac{1}{(k-1)!} n(n-1)(n-2) \cdots (n-(k-2)) z^{n-(k-1)} \Big|_{z=a} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-(k-2))}{(k-1)!} a^{n-k+1} \end{aligned}$$



- Αν $n < 0$, θέτω $\rho = \frac{1}{z}$, άρα η περιοχή σύγκλισης γίνεται $|\rho| < \frac{1}{|a|}$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{C \in \text{ROC}} \frac{\rho^{-n}}{(\rho^{-1} - a)^k} \frac{1}{\rho^2} d\rho \\ &= -\frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{\rho^{-n} \rho^{k-2}}{(1 - a\rho)^k} d\rho = -\frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{\rho^{-n+k-2}}{(-a)^k \left(\rho - \frac{1}{a}\right)^k} d\rho \end{aligned}$$



Αφού $n - k + 2 < 0$, ο πόλος βρίσκεται εκτός της καμπύλης C, επομένως το παραπάνω ολοκλήρωμα γίνεται:

$$x(n) = 0$$

Θεώρημα 3.1: Γενικός τύπος κλάσματος σε Μ/Σ Z

Τα παραπάνω συνοψίζονται ως εξής:

- Για $|z| > |a|$:

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{z}{(z-a)^k}, \quad |z| > |a| \quad k \in \mathbb{N} - \{0, 1\} \\ x(n) &= -(-1)^k a^{-k+n+1} \frac{(k-n-2)(k-n-3) \cdots (-n)}{(k-1)!} u(n) \end{aligned}$$

- Για $|z| < |a|$:

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{z}{(z-a)^k}, \quad |z| < |a| \quad k \in \mathbb{N} - \{0, 1\} \\ x(n) &= (-1)^k a^{-k+n+1} \frac{(k-n-2)(k-n-3) \cdots (-n)}{(k-1)!} u(-n-1) \end{aligned}$$

Άσκηση

Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z της ακολουθίας:

$$X(z) = \frac{z^2 + z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^3 \left(z - \frac{1}{4}\right)}$$

για όλες τις πιθανές περιοχές σύγκλισης.

Λύση

Η κάθε πιθανή περιοχή σύγκλισης δεν πρέπει να περιέχει άλλο πόλο, άρα οι πιθανές περιοχές σύγκλισης είναι $|z| > \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{2}$, $|z| < \frac{1}{4}$.

- Για $|z| > \frac{1}{2}$, μετατρέπουμε σε μερικά κλάσματα:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z+1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^3 \left(z-\frac{1}{4}\right)} = \frac{A}{z-\frac{1}{2}} + \frac{B}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{C}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^3} + \frac{D}{z-\frac{1}{4}}$$

Υπολογίζουμε τις σταθερές:

$$X(z) = \frac{80z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{-20z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{6z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^3} + \frac{-80z}{z-\frac{1}{4}}$$

Τώρα, αρκεί να υπολογίσουμε ξεχωριστά τον κάθε όρο, με βάση τα παραπάνω:

- ο $\frac{80z}{z-\frac{1}{2}} \xrightarrow{zT} 80 \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$
- ο $\frac{-80z}{z-\frac{1}{4}} \xrightarrow{zT} -80 \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$
- ο $\frac{-20z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{6z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^3} \xrightarrow{zT} -20n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n) + 6 \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u(n)$

Άρα τελικά:

$$x(n) = \left[80 \left(\frac{1}{2}\right)^n - 20n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 3n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - 80 \left(\frac{1}{4}\right)^n \right] u(n)$$

Άσκηση για το σπίτι

Να υπολογιστεί η $x(n)$ και για τις άλλες δύο πιθανές περιοχές σύγκλισης. Προσοχή στο ότι δεν είναι απαραίτητο να υπολογιστούν ξανά οι σταθερές και όλα τα κλάσματα, παρά μόνον αυτά που αλλάζουν λόγω της διαφορετικής περιοχής σύγκλισης.

Άσκηση: Θέμα 4 Σεπτεμβρίου 2018

Δίνεται η κρουστική απόκριση ενός συστήματος:

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

Εξετάστε αν το σύστημα είναι:

- Αιτιατό;
- Ευσταθές;
- Πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης;

Επιπλέον, να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier και ο μετασχηματισμός Z της $h(n)$. Να βρεθεί μια εξίσωση διαφορών που να συνδέει τα $y(n)$ με τις τιμές των $x(n)$. Να βρεθεί η ενέργεια του $h(n)$.

Λύση

1. Το σύστημα είναι **αιτιατό**, γιατί $h(n) = 0$ για $n < 0$.
2. Για να είναι το σύστημα ευσταθές κατά ΦΕΦΕ, η κρουστική απόκριση πρέπει να είναι απολύτως αθροίσιμη, δηλαδή να ελέγξουμε αν συγκλίνει το $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)|$ (Θεώρημα 1.2).

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{30}\right)^n \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| \left(\frac{1}{2}\right)^n \right| + \sum_{n=0}^{\infty} \left| \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \\ &= 2 + \frac{3}{2} < \infty \implies \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \end{aligned}$$

Άρα το σύστημα είναι **ευσταθές** κατά ΦΕΦΕ.

3. Η κρουστική απόκριση δεν είναι πεπερασμένη στο χρόνο, αφού δεν υπάρχει κάποια στιγμή μετά από την οποία να μηδενίζονται οι όροι της.

Μαθηματικά, το σύστημα **δεν είναι πεπερασμένης** διάρκειας, γιατί $\nexists k \in \mathbb{N} : h(n) = 0 \forall n > k$.

4. Για το **μετασχηματισμό Z**, έχουμε:

$$\begin{aligned} H(z) &\triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3z}\right)^n \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{2z}} + \frac{1}{1+\frac{1}{3z}} \\ &\quad \text{αν } \left|\frac{1}{2z}\right| < 1 \text{ αν } \left|\frac{-1}{3z}\right| < 1 \\ &= \frac{z}{z-1/2} + \frac{z}{z+1/3} \quad |z| > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Άρα τελικά:

$$H(n) = \frac{z}{z-1/2} + \frac{z}{z+1/3} \quad \text{ROC: } |z| > \frac{1}{2}$$

5. Για τον υπολογισμό του **μετασχηματισμού Fourier**, έχουμε τον ορισμό:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$$

Θέτοντας $z = e^{j\omega}$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την πληροφορία από το μετασχηματισμό Z, καθώς $|e^{j\omega}| = 1 > \frac{1}{2}$, δηλαδή ανήκουμε στην περιοχή σύγκλισής του.

Άρα τελικά:

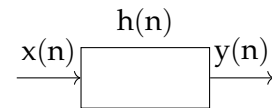
$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= H(z)|_{z=e^{j\omega}} \\ &= \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-1/2} + \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}+1/3} \end{aligned}$$

6. Το παραπάνω σύστημα εκφράζεται από τη σχέση:

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

ή, στο πεδίο της συχνότητας:

$$X(z)H(z) = Y(z)$$



Θα προσπαθήσουμε, επεκτείνοντας την παραπάνω σχέση, να βρούμε μια σχέση μεταξύ $x(n)$ και $y(n)$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} X(z) \left[\frac{z}{z-1/2} + \frac{z}{z+1/3} \right] &= Y(z) \\ X(z) \left[\frac{z^2 + \frac{1}{3}z + z^2 - \frac{1}{2}z}{z^2 - \frac{1}{6}z - \frac{1}{6}} \right] &= Y(z) \\ X(z) \left[\frac{2z^2 - \frac{1}{6}z}{z^2 - \frac{1}{6}z - \frac{1}{6}} \right] &= Y(z) \\ X(z) \left[\frac{2 - \frac{1}{6}z^{-1}}{1 - \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}} \right] &= Y(z) \\ X(z) \left(2 - \frac{1}{6}z^{-1} \right) &= Y(z) \left(1 - \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2} \right) \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε inverse \mathcal{Z} transform:

$$2x(n) - \frac{1}{6}x(n-1) = y(n) - \frac{1}{6}y(n-1) - \frac{1}{6}y(n-2)$$

$$\boxed{y(n) = \frac{1}{6}y(n-1) + \frac{1}{6}y(n-2) + 2x(n) - \frac{1}{6}x(n-1)} \quad n \geq 0$$

Λάβαμε μία σχέση η οποία συνδέει το **τρέχον** y μόνο με τα **προηγούμενα** y, x και το **τρέχον** x . Αυτό επιβεβαιώνει πως το σύστημά μας είναι αιτιατό. Η σχέση αυτή είναι μια **εξίσωση διαφορών**.

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να μην είχαμε διατρέσει τους όρους του κλάσματος με z^2 , και θα προέκυπτε μία σχέση όπου θα μπορούσαμε να κάνουμε αντικατάσταση της μεταβλητής n ώστε να λάβουμε το ίδιο αποτέλεσμα, που να μην εξαρτά τρέχουσες από μελλοντικές στιγμές.

7. Η **ενέργεια** του σήματος είναι:

$$\begin{aligned} E &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right|^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3} \right)^{2n} + 2 \left(\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} \right) \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{9} \right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2 \left(-\frac{1}{6} \right)^n \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} + 2 \frac{1}{1 + \frac{1}{6}} \\ &= \frac{4}{3} + \frac{9}{8} + \frac{12}{7} = \frac{701}{168} \end{aligned}$$

Άσκηση

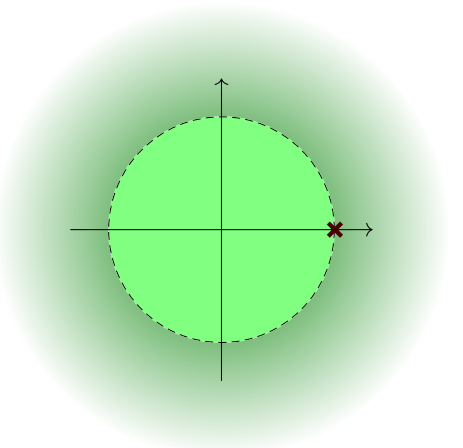
Δίνεται η συνάρτηση:

$$X(z) = \frac{z}{z - a}$$

Να βρεθούν οι πιθανές περιοχές σύγκλισης του μετασχηματισμού Z που εκφράζει η $X(z)$.

Λύση

Ο μετασχηματισμός μπορεί να συγκλίνει είτε για $|z| > |a|$ ή $|z| < |a|$. Αν θέσω $z = a$, τότε ο μετασχηματισμός δεν θα ορίζεται λόγω του παρονομαστή, δηλαδή δεν θα συγκλίνει. Όμως αν θέσω διαφορετικές τιμές $z = a + 0.1$ ή $z = a - 0.1$, τότε η $X(z)$ θα δίνει ένα φυσιολογικό νόημο. Από αυτό, προκύπτει το *ερώτημα* γιατί πρέπει να κρατάμε μόνο μία περιοχή $|z| > |a|$ ή $|z| < |a|$ και όχι ολόκληρη τη $|z| \neq |a|$.



Αυτό απαντάται λόγω του ότι η $X(z)$ πρέπει να είναι **συνεχής**, γιατί μόνο τότε μπορεί να εκφραστεί σαν το άπειρο άθροισμα των όρων που προκύπτει από τον ορισμό του μετασχηματισμού Z :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα μοιάζει με τη σειρά $\frac{1}{1+x}$, που έχει διαφορετικά αναπτύγματα για $|x| < 1$ και $|x| > 1$.

3.5 Εξίσωση διαφορών για γραμμικό & ΑΚΜ σύστημα

Το αντίστοιχο των διαφορικών εξισώσεων στο αναλογικό σήμα είναι οι **εξισώσεις διαφορών** στα ψηφιακά συστήματα, οι οποίες σχετίζουν τιμές των συναρτήσεών μας με τιμές άλλων συναρτήσεων άλλες στιγμές.

Ορισμός 3.2: Εξίσωση διαφορών

Ως **γραμμική εξίσωση διαφορών** ορίζεται η:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) \quad a_0 \neq 0$$

ή, ισοδύναμα:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a_0} y(n-k) + \sum_{r=0}^M \frac{b_r}{a_0} x(n-r)$$

Η **γραμμικότητα** στις παραπάνω σχέσεις εκφράζεται από την έλλειψη γινομένων y και x , και την έλλειψη άλλων περιέργων όρων.

Παράδειγμα

$$y(n) - ay(n-1) = x(n)$$

Για να έχει νόημα η εξίσωση διαφορών, πρέπει να ορίσουμε και την **περιοχή** στην οποία ορίζεται, καθώς και κάποιες αρχικές συνθήκες. Σε αυτό το παράδειγμα, θα μπορούσε να μας δοθεί:

$$n \geq 0, \quad y(n) = 0 \quad \forall n < 0$$

Έστω ότι η είσοδος είναι κρουστική:

$$x(n) = \delta(n)$$

άρα η έξοδος θα είναι η κρουστική απόκριση του συστήματος:

$$h(n) = ah(n-1) + \delta(n)$$

Τώρα, μπορούμε να κάνουμε μια *αφελή* λύση της εξίσωσης, υπολογίζοντας *n after n*:

$$\begin{aligned} n = 0 \quad h(0) &= a\cancel{h(-1)}^0 + 1 = 1 \\ n = 1 \quad h(1) &= ah(0) + \delta(1) = a \\ n = 2 \quad h(2) &= ah(1) + \delta(2) = a^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Με επαγωγή μπορούμε να αποδείξουμε ότι:

$$h(n) = a^n u(n)$$

οπότε βρήκαμε τη λύση της εξίσωσης.

Από τη μια μεριά, αν μας δινόταν ότι $y(n) = 0 \quad \forall n \geq 0$ (*διαφορετικές συνθήκες*), τότε θα βρίσκαμε ότι

$$\begin{aligned} h(0) &= 0 \\ h(1) &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

αλλά θα μπορούσαμε, υπολογίζοντας μελλοντικούς χρόνους, να βρούμε τι γίνεται για αρνητικά *n*:

$$\begin{aligned} y(n-1) &= \frac{1}{a}y(n) - \frac{x(n)}{a} \\ y(-1) &= \frac{1}{a}\cancel{y(0)}^0 - \frac{x(0)}{a} = -\frac{1}{a} \\ y(-2) &= \frac{1}{a}y(-1) - \frac{x(-1)}{a} = \frac{1}{a} \left(-\frac{1}{a} \right) = -\frac{1}{a^2} \\ &\vdots \\ y(n) &= -a^n u(-n-1) \end{aligned}$$

Το παραπάνω συμπέρασμα θυμίζει και τα διαφορετικά αποτελέσματα που προκύπτουν όταν έχουμε διαφορετικές περιοχές σύγκλισης στο μετασχηματισμό \mathcal{Z} .

3.5.1 Εξαγωγή συνάρτησης μεταφοράς

Έστω ότι γνωρίζουμε για μια συνάρτηση $H(z)$ τις **θέσεις των πόλων** q_i , τις θέσεις των μηδενικών p_i , και τις πολλαπλότητές τους. Δηλαδή ξέρουμε ότι η συνάρτηση είναι της μορφής:

$$H(z) = A \frac{(z - q_1)^{s_1} (z - q_2)^{s_2} \cdots (z - q_n)^{s_n}}{(z - p_1)^{s_1} (z - p_2)^{s_2} \cdots (z - p_m)^{s_m}}$$

Τότε, πραγματοποιώντας τις πράξεις στον παρονομαστή και τον αριθμητή, θα λάβουμε πολυώνυμα μέσα από τα οποία θα προκύπτει ουσιαστικά η εξίσωση διαφορών που παράγει την $h(n)$.

Παράδειγμα

$$\boxed{H(z) = \frac{z-3}{z-\frac{1}{3}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \implies |z| > \frac{1}{3}}$$

$$(1 - 3z^{-1})X(z) = \left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)Y(z)$$

$$X(z) - 3z^{-1}X(z) = Y(z) - \frac{1}{3}z^{-1}Y(z) \xrightarrow{\text{LZT}}$$

$$x(n) - 3x(n-1) = y(n) - \frac{1}{3}y(n-1)$$

$$y(n) = \frac{1}{3}y(n-1) + x(n) - 3x(n-1) \quad n \geq 0$$

Άσκηση

Δίνεται μία $H(z)$ με πόλο $z = a$ και μηδενικό $z = \frac{1}{a^*}$. Ισχύει $|a| < 1$, και το σύστημα είναι αιτιατό. Να βρεθεί η απόκριση συχνότητας του συστήματος.

Λύση

Θεωρούμε ότι $a \in \mathbb{R}$. Για να έχουμε το δικαίωμα να βρούμε απόκριση συχνότητας (δηλαδή να βάλουμε το $z = e^{j\omega}$), πρέπει να επιβεβαιώσουμε ότι ο μοναδιαίος κύκλος ανήκει στην περιοχή σύγκλισης. Η περιοχή σύγκλισης είναι της μορφής $|z| < |a|$ ή $|z| > |a|$. **Επειδή το σύστημα είναι αιτιατό, δηλαδή η κρουστική του απόκριση είναι ακολουθία δεξιάς πλευράς, η περιοχή σύγκλισής του είναι της μορφής $|z| > |a|$ (Σελίδα 26).** Αφού $|a| < 1$, ο μοναδιαίος κύκλος ανήκει στην περιοχή σύγκλισης.

Το σύστημα έχει τη μορφή:

$$H(z) = \frac{z - \frac{1}{a}}{z - a}$$

(χωρίς να μας ενδιαφέρει η σταθερά A που μπαίνει από μπροστά).

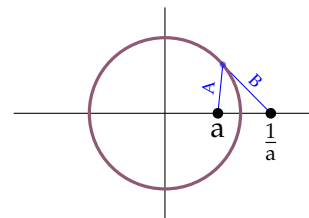
Για να βρούμε την απόκριση συχνότητας, θεωρούμε $z = e^{j\omega}$:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{e^{j\omega} - \frac{1}{a}}{e^{j\omega} - a} \\ |H(\omega)|^2 &= \frac{\left(e^{j\omega} - \frac{1}{a}\right)\left(e^{-j\omega} - \frac{1}{a}\right)}{\left(e^{j\omega} - a\right)\left(e^{-j\omega} - a\right)} = \frac{1 + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a}\left(e^{j\omega} + e^{-j\omega}\right)}{1 + a^2 - a\left(e^{j\omega} + e^{-j\omega}\right)} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a}2\cos\omega}{1 + a^2 - a2\cos\omega} = \frac{1}{a^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Όλες οι συχνότητες έχουν **σταθερό κέρδος**, άρα το σύστημα είναι **all-pass**.

Εναλλακτικά, μπορούσαμε να έχουμε:

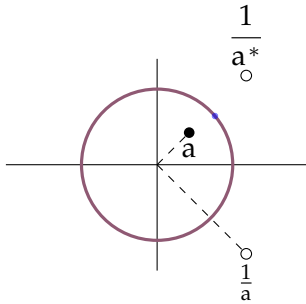
$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{z - \frac{1}{a}}{z - a} \\ |H(\omega)| &= |H(z)|_{z=e^{j\omega}} \\ &= \frac{\left|z - \frac{1}{a}\right|_{z=e^{j\omega}}}{\left|z - a\right|_{z=e^{j\omega}}} = \frac{B}{A} \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{a^2} \end{aligned}$$



Το παραπάνω αποτέλεσμα εκφράζει ότι ο λόγος των αποστάσεων ενός σημείου του μοναδιαίου κύκλου από τους δύο πόλους/μηδενικά είναι σταθερός.

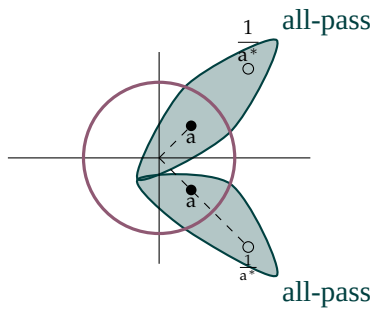
Για το παραπάνω υπάρχει και γεωμετρική απόδειξη που βασίζεται στο γενικευμένο πυθαγόρειο θεώρημα.

Αν είχαμε θεωρήσει ότι $a \in \mathbb{C}$, το μιγαδικό επίπεδο του z θα έμοιαζε ως εξής:



Δεδομένου ότι η εκφώνηση μας δίνει τα σημεία a και $\frac{1}{a^*}$, το αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο με πριν, αφού μπορούμε απλώς να περιστρέψουμε το επίπεδο και να φτάσουμε τις ίδιες συνθήκες με πριν.

Αντίστοιχα, προσθέτοντας περισσότερα τέτοια ζευγάρια πόλων-μηδενικών μπορούμε να έχουμε πάλι all-pass συστήματα:



Άσκηση

Να χαρακτηριστούν τα δύο συστήματα (ως προς ευστάθεια & είδος απόκρισης):

$$S_1 : y_1(n) = \frac{x(n) + x(n-1)}{2}$$

$$S_2 : y_2(n) = \frac{x(n) - x(n-1)}{2}$$

Λύση

Η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι $h(n) = \frac{1}{2}\delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1)$ (αφού $y = x * h$). Έχει δύο όρους, πολύ λιγότερους από ∞ , άρα η ακολουθία είναι απολύτως αθροίσιμη. Επομένως το σύστημα είναι ευσταθές.

Εναλλακτικά, το σύστημα είναι ευσταθές αφού η έξοδος προκύπτει από άθροιση πεπερασμένου πλήθους δειγμάτων της εισόδου χωρίς ανάδραση (προηγούμενες τιμές y).

Αφού και τα δύο συστήματα είναι **ευσταθή, ο μοναδιαίος κύκλος ανήκει στην περιοχή σύγκλισης**, και μπορούμε άφοβα να θέσουμε $z = e^{j\omega}$.

Το παραπάνω συμπέρασμα μοιάζει με αυτό που είχαμε εξάγει στο αναλογικό σήμα. Ότι δηλαδή το σύστημα είναι ευσταθές όταν όλοι οι πόλοι βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο, ή αντίστοιχα όταν ο φανταστικός άξονας ανήκει στην περιοχή σύγκλισης.

Έχουμε:

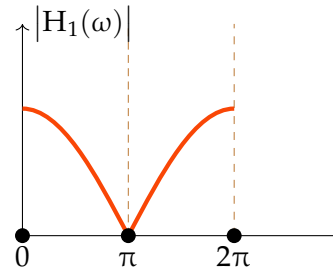
$$S_1 : \quad Y_1(z) = \frac{1}{2} (X(z) + z^{-1}X(z))$$

$$H_1(z) = \frac{Y_1(z)}{X(z)} = \frac{1}{2} (1 + z^{-1})$$

$$H_1(\omega) = H_1(z)|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{2} (1 + e^{-j\omega})$$

$$|H_1(\omega)| = \left| e^{-j\frac{\omega}{2}} \frac{1}{2} (e^{j\frac{\omega}{2}} + e^{-j\frac{\omega}{2}}) \right|$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} \left| 2 \cos \frac{\omega}{2} \right| = \left| \cos \frac{\omega}{2} \right|$$



Για να εξάγουμε συμπέρασμα για το χαρακτήρα του συστήματος, κοιτάμε μόνο το κομμάτι από 0 ως π . Επομένως το παραπάνω σύστημα είναι **low-pass**. Το δεξί κομμάτι είναι το αντίστοιχο αρνητικό κομμάτι του αναλογικού μετασχηματισμού Fourier.

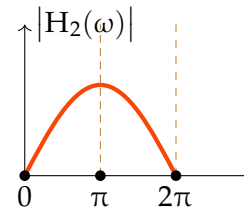
Για το δεύτερο σύστημα:

$$S_2 \quad Y_2(z) = \frac{X(z) - z^{-1}X(z)}{2}$$

$$H_2(z) = \frac{Y_2(z)}{X(z)} = \frac{1}{2} (1 - z^{-1})$$

$$H_2(\omega) = \frac{1}{2} (1 - e^{-j\omega}) = e^{-j\frac{\omega}{2}} \frac{1}{2} (e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}})$$

$$|H_2(\omega)| = \left| \sin \left(\frac{\omega}{2} \right) \right|$$



Εδώ, κοιτώντας από 0 ως π , διαπιστώνουμε ότι το σύστημα είναι **high pass**.

Στα παραπάνω συμπεράσματα μπορούσαμε να φτάσουμε και πριν λύσουμε τα μαθηματικά. Πράγματι, τα συστήματα μπορούν να γραφτούν και ως εξής:

$$y_1(n) = \frac{1}{2} (x(n) + x(n-1))$$

$$y_2(n) = \frac{1}{2} (x(n) - x(n-1))$$

Το πρώτο σύστημα είναι ουσιαστικά ένα **τοπικό ολοκλήρωμα**, και το δεύτερο μια **τοπική παράγωγος** στον ψηφιακό κόσμο. Οπότε, μπορούμε να θυμηθούμε τις αντιστοιχίες από το αναλογικό σήμα και να εξάγουμε τα ίδια συμπεράσματα.

Άσκηση

Να χαρακτηριστεί *πρόχειρα* το σύστημα:

$$y(n) = \frac{x(n) - 2x(n-1) + x(n-2)}{6}$$

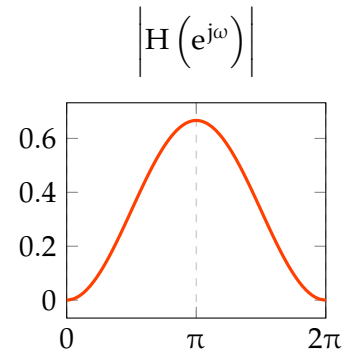
Λύση

Ισχύει:

$$y(n) = \frac{x(n) - x(n-1)}{6} - \frac{x(n-1) - x(n-2)}{6}$$

Εδώ έχουμε ουσιαστικά διαφορά πρώτης παραγώγου μείον πρώτη παράγωγος. Η διαφορά δύο παραγώγων είναι η **δεύτερη παράγωγος!**

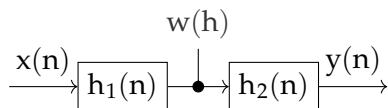
Από το αναλογικό σήμα θυμόμαστε ότι η n-οστή παράγωγος είναι μια άνοδος κατά +20 dB/dec, επομένως το σύστημα είναι high pass.



3.5.2 Σύνδεση συστημάτων

Είναι απλό να δούμε τι συμβαίνει με συστήματα που συνδέονται σε συγκεκριμένες συνδεσμολογίες, τις οποίες θέλουμε να μετατρέψουμε σε ένα σύστημα $h(n)$.

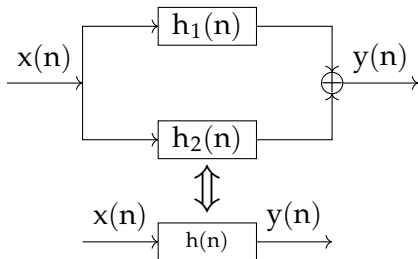
Εν σειρά (καταρράκτης)



Έχουμε:

$$\begin{aligned} w(n) &= x(n) * h_1(n) \\ y(n) &= w(n) * h_2(n) = (x(n) * h_1(n)) * h_2(n) \\ &= x(n) * (h_1(n) * h_2(n)) \\ Y(z) &= X(z) \cdot H(z) \end{aligned}$$

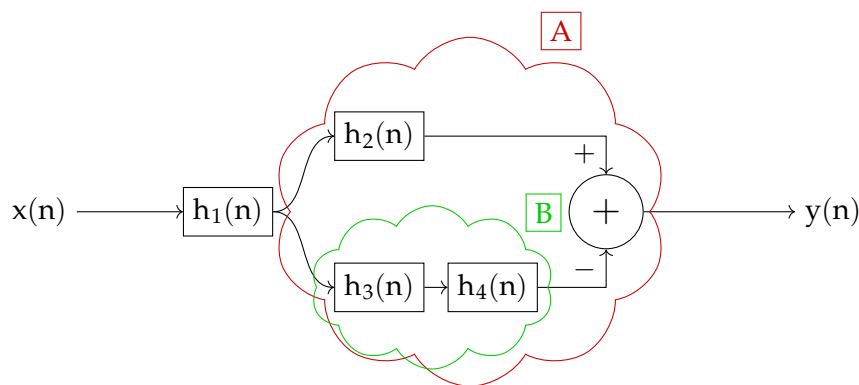
Παράλληλη σύνδεση



$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) * h_1(n) \pm x(n) * h_2(n) \\ &= x(n) * (h_1(n) \pm h_2(n)) \\ Y(z) &= H(z)X(z) \quad \text{όπου } H(z) = H_1(z) \pm H_2(z) \end{aligned}$$

Άσκηση

Δίνεται το σύστημα:



με τις κρουστικές αποκρίσεις του κάθε μπλοκ:

$$h_1(n) = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right\}$$

$$h_2(n) = h_3(n) = (n + 1)u(n)$$

$$h_4(n) = \delta(n - 2)$$

Να βρεθεί η ισοδύναμη $h(n)$ του συστήματος.

Λύση

Πρώτα, μετατρέπουμε την $h_1(n)$ σε μια πιο "μαθηματική" μορφή:

$$h_1(n) = \frac{1}{2}\delta(n) + \frac{1}{4}\delta(n - 1) + \frac{1}{2}\delta(n - 2)$$

Άρα, με βάση την Ενότητα 3.5.2, η κρουστική απόκριση του συστήματος θα είναι:

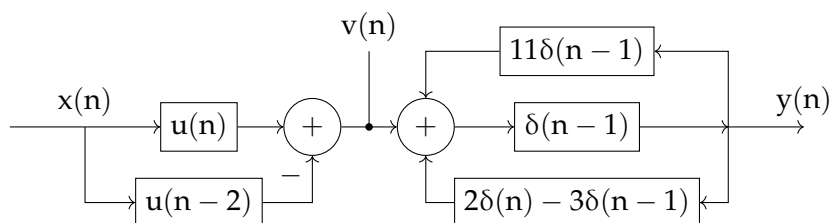
$$\begin{aligned} h(n) &= h_1(n) * \boxed{\text{A}} \\ &= h_1(n) * [h_2(n) - \boxed{\text{B}}] \\ &= h_1(n) * [h_2(n) - h_3(n) * h_4(n)] \\ &= h_1(n) * [nu(n) + u(n) - nu(n - 2) + u(n - 2)] \end{aligned}$$

Εδώ, επειδή έχουμε διακριτά n , μπορούμε να μετατρέψουμε τη διαφορά $nu(n) - nu(n - 2)$ σε συναρτήσεις δ :

$$\begin{aligned} &= h_1(n) * [2u(n) - \delta(n)] = \left[\frac{1}{2}\delta(n) + \frac{1}{4}\delta(n - 1) + \frac{1}{2}\delta(n - 2) \right] * [2u(n) - \delta(n)] \\ &= \frac{5}{2}u(n - 3) + \frac{1}{2}\delta(n) + \frac{5}{4}\delta(n - 1) + 2\delta(n - 2) \end{aligned}$$

Άσκηση

Για το σύστημα:



ΑΙΤΙΑΤΟ

ζητούνται:

- 1) Η εξίσωση διαφορών

2) Η $H(z)$ του μαζί με τη ROC (περιοχή σύγκλισης)

3) Να μελετηθεί η ευστάθεια του συστήματος.

Λύση

1) Πρώτα, ασχολούμαστε με τη βοηθητική συνάρτηση $v(n)$:

$$\begin{aligned}v(n) &= x(n) * u(n) - x(n) * u(n-2) = x(n) * (u(n) - u(n-2)) \\ &= x(n) * [\delta(n) + \delta(n-1)] = x(n) + x(n-1)\end{aligned}$$

Προχωράμε και στο δεύτερο μέρος:

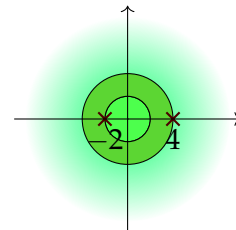
$$\begin{aligned}y(n) &= w(n) * \delta(n-1) \\ &= [v(n) + 11\delta(n-1) * y(n) + (2\delta(n) - 3\delta(n-1)) * y(n)] * \delta(n-1) \\ &= x(n-1) + x(n-2) + [11y(n-1) + 2y(n) - 3y(n-1)] * \delta(n-1) \\ &= x(n-1) + x(n-2) + 8y(n-2) + 2y(n-1), \quad \text{για } n \geq 0\end{aligned}$$

2) Με βάση την παραπάνω έκφραση της $H(z)$, έχουμε:

$$\begin{aligned}Y(z) &= z^{-1}X(z) + z^{-2}X(z) + 8z^{-2}Y(z) + 2z^{-1}Y(z) \implies \\ H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2z^{-1} - 8z^{-2}} = \frac{z + 1}{z^2 - 2z - 8}\end{aligned}$$

Οι πόλοι είναι $z_1 = 4$ και $z_2 = -2$, με πιθανές περιοχές σύγκλισης:

- $|z| < 2$
- $2 < |z| < 4$
- $4 < |z|$



Αφού το σύστημα είναι **αιτιατό**, το ROC τελικά είναι $|z| > 4$.

3) Αφού $|e^{j\omega}| \notin \text{ROC}$, ο μετασχηματισμός Fourier του συστήματος δεν υπάρχει (Σελίδα 24). Επομένως, το σύστημα είναι ασταθές (Σελίδα 20).

Παράδειγμα "μονόπλευρου" μετασχηματισμού Z

Θεωρώντας έναν *μονόπλευρο* μετασχηματισμό Z (δηλαδή $\sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$) που εξετάζει μόνο το αιτιατό κομμάτι μιας ακολουθίας, μπορούμε να λάβουμε άμεσα υπ' όψιν τις αρχικές συνθήκες της ακολουθίας πριν το 0.

Για παράδειγμα, στην παρακάτω εξίσωση διαφορών:

$$\begin{aligned}
 y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) &= x(n) - \frac{1}{4}x(n-1) \quad n \geq 0 \\
 y(n)z^{-n} - \frac{1}{2}y(n-1)z^{-n} &= x(n)z^{-n} - \frac{1}{4}x(n-1)z^{-n} \\
 \sum_{n=0}^{\infty} y(n)z^{-n} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} y(n-1)z^{-n} &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} x(n-1)z^{-n} \\
 Y(z) - \frac{1}{2} \sum_{k=-1}^{\infty} y(k)z^{-k-1} &= X(z) - \frac{1}{4} \sum_{k=-1}^{\infty} x(k)z^{-k-1} \\
 Y(z) - \frac{1}{2}z^{-1} \sum_{k=-1}^{\infty} y(k)z^{-k} &= X(z) - \frac{1}{4}z^{-1} \sum_{k=-1}^{\infty} x(k)z^{-k} \\
 Y(z) - \frac{1}{2}z^{-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k} + y(-1)z \right) &= X(z) - \frac{1}{4}z^{-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} + x(-1)z \right) \\
 Y(z) - \frac{1}{2}z^{-1} (Y(z) + y(-1)z) &= X(z) - \frac{1}{4}z^{-1} [X(z) + x(-1)z] \\
 Y(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) - \frac{1}{2}y(-1) &= X(z) - \frac{1}{4}z^{-1}X(z) - \frac{1}{4}x(-1) \\
 Y(z) &= X(z) \underbrace{\frac{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}}_{\text{εξαναγκασμένη απόκριση}} + \underbrace{\frac{1/2y(-1) - 1/4x(-1)}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}}_{\text{ελεύθερη απόκριση}}
 \end{aligned}$$

Άσκηση για το σπίτι

Ποιά είναι η $y(n)$ όταν $x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$ για $y(-1) = 1$ με το σύστημα που περιγράφεται από την παραπάνω εξίσωση διαφορών;

Η απάντηση θα είναι:

$$y(n) = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{1}{2} \right] u(n) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

Άσκηση

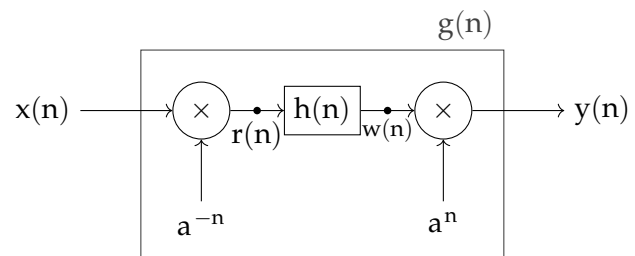
Δίνεται το σύστημα $y(n] = (x(n)a^{-n}) * (h(n)a^n)$

όπου:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

μία αιτιατή συνάρτηση.

Να βρεθεί το ισοδύναμο του σύστημα $g(n)$.



Λύση

Από το διάγραμμα, παρατηρούμε ότι:

$$\left. \begin{aligned}
 r(n) &= x(n)a^{-n} \\
 w(n) &= r(n) * h(n) \\
 y(n) &= w(n)a^n
 \end{aligned} \right\} \implies y(n) = a^n (r(n) * h(n))$$

Άρα μπορούμε να εκτελέσουμε τις πράξεις:

$$\begin{aligned} y(n) &= a^n \left[\left(a^{-n} x(n) \right) * h(n) \right] = a^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) a^{-(n-k)} x(n-k) \\ &= a^n a^{-n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) a^k x(n-k) = x(n) * [h(n) a^n] = x(n) * g(n) \end{aligned}$$

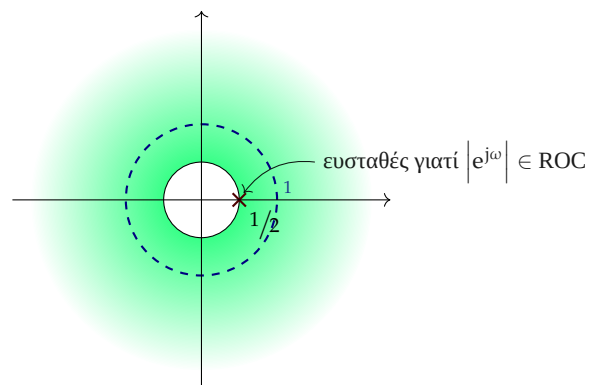
Άρα $g(n) = a^n h(n) \implies$

$$G(z) = H\left(\frac{z}{a}\right) = \frac{1 - \left(\frac{z}{a}\right)^{-1}}{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a}\right)^{-1}}$$

Για την περιοχή σύγκλισης, παρατηρούμε πως η H έχει πόλο στο $\frac{1}{2}$. Άρα:

$$ROC_H : |z| > \frac{1}{2} \implies ROC_G : \left| \frac{z}{a} \right| > \frac{1}{2}$$

άρα $|z| > \frac{|a|}{2}$.



Λαμβάνοντας υπ' όψιν το κριτήριο για τον μοναδιαίο κύκλο $e^{j\omega}$: Αν $\frac{|a|}{2} < 1$, τότε G ευσταθές, διαφορετικά το G είναι ασταθές.

Άσκηση

Να βρεθεί η $x(n)$, αν:

$$x(n) = \text{IZT} \left\{ \log \left(1 + az^{-1} \right) \right\} \quad |z| > |a|$$

Λύση

Μία ιδέα για να βρούμε τη $x(n)$ θα ήταν να αξιοποιήσουμε τη **σειρά Taylor** του λογαρίθμου:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad -1 < x < 1$$

$$X(z) = az^{-1} - \frac{a^2}{2} z^{-2} + \frac{a^3}{3} z^{-3} - \frac{a^4}{4} z^{-4} + \dots$$

$$x(n) = \left\{ 0, a, -\frac{a^2}{2}, \frac{a^3}{3}, -\frac{a^4}{4}, \dots \right\} = (-1)^{n-1} \frac{a^n}{n}$$

Δηλαδή, βρίσκοντας τη σειρά Laurent της συνάρτησης, μπορούμε να βρούμε και τους όρους της ακολουθίας, με βάση και τον ορισμό $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$.

Εναλλακτικά, χωρίς τη σειρά Taylor, εκμεταλλευόμαστε τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} nx(n) \xrightarrow{zT} -z \frac{dx(z)}{dz} &= -z \frac{1}{1+az^{-1}} (-az^{-2}) = \frac{az^{-1}}{1+az^{-1}} \\ &= az^{-1} \frac{z}{z+a} \\ \frac{z}{z+a} \xrightarrow{1zT} a^n u(n) & \quad |z| > |a| \\ z^{-1} \frac{z}{z+a} \xrightarrow{1zT} & (-a)^{n-1} u(n-1) \end{aligned}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} nx(n) &= (-1)^{n-1} a^n u(n-1) \implies \\ x(n) &= (-1)^{n-1} \frac{a^n}{n} u(n-1) \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 4 Δειγματοληψία

Στο παρόν θα εξετάσουμε το μετασχηματισμό **Fourier** που δίνει ένα **διακριτό δειγματοληπτημένο** σήμα, και θα τον συγκρίνουμε με το μετασχηματισμό Fourier του αρχικού **αναλογικού** σήματος. Πρακτικά, μέσα από το μετασχηματισμό Fourier που δίνει ένας υπολογιστής θέλουμε να δούμε τις πληροφορίες που μπορούμε να εξαγάγουμε για το διακριτό σήμα.

Συνεχής μετασχηματισμός Fourier διακριτού σήματος Υπενθυμίζουμε πως ο συνεχής MF μιας ακολουθίας ορίζεται ως εξής:

$$x(n) \rightarrow X(e^{j\omega}) = X(\omega) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

όπου η ω είναι **συνεχής**, με εύρος π.χ. $(-\pi, \pi)$ ή $(0, 2\pi)$.

Ο αντίστροφος ορίζεται ως $x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$.

Αυτός είναι ο **συνεχής μετασχηματισμός Fourier** ενός **διακριτού σήματος**.

Σε περιοδικά σήματα Έστω ότι έχουμε ένα **περιοδικό** διακριτό σήμα $\tilde{x}(n)$ με περίοδο N δείγματα.

Το περιοδικό σήμα αυτό περιέχει στην πραγματικότητα μόνο N **αριθμούς πληροφορίας**. Αφού τα N δείγματα επαναλαμβάνονται συνεχώς, είναι το μόνο δεδομένο που περιγράφει το σήμα. Επομένως, και ο μετασχηματισμός Fourier του δεν μπορεί να περιέχει παραπάνω ή λιγότερη πληροφορία, άρα θα πρέπει και αυτός να περιέχει N αριθμούς.

Τότε αποδεικνύεται ότι:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j(\frac{2\pi}{N})nk} \quad \forall n \\ \text{όπου } \tilde{X}(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j(\frac{2\pi}{N})nk} \end{aligned}$$

Οι παραπάνω σχέσεις προκύπτουν από τον ορισμό του συνεχή μετασχηματισμού Fourier, στον οποίο όμως το n κινείται μόνο από 0 μέχρι $N - 1$ και αυτό επαναλαμβάνεται, όπου θέσαμε $\omega = \frac{2\pi}{N}k$. Το $X(k)$ είναι η **διακριτή σειρά Fourier**.

Ακόμα, αν έχουμε δύο περιοδικά σήματα \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 με ίδια περίοδο N , τότε για το σήμα $\tilde{x}_3(n) = \tilde{x}_1(n)\tilde{x}_2(n)$ ισχύει:

$$\tilde{X}_3(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_1(l)\tilde{X}_2(k-l) = X_1(k) \otimes X_2(k)$$

όπου με το σύμβολο \otimes ορίσαμε την περιοδική συνέλιξη, μία συνέλιξη δηλαδή που δεν εκτείνεται ως το άπειρο, αλλά είναι περιορισμένη από την περίοδο N .

Σε σήματα πεπερασμένης διάρκειας

Ορισμός 4.1: Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

Έστω ότι ένα σήμα έχει πεπερασμένη διάρκεια:

$$x(n) \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Τότε ο μετασχηματισμός Fourier του θα είναι:

$$X(k) \triangleq \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

για $k = 0, 1, \dots, N-1$ (όπου ορίσαμε $k = N\frac{\omega}{2\pi}$, όπως παραπάνω).

Αυτός ορίζεται ως **Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (Discrete Fourier Transform — DFT)**.

Ο αντίστροφός του είναι:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Ο **DFT** ενός σήματος με N δείγματα θα έχει, όπως είδαμε παραπάνω, αναγκαστικά και αυτός N αριθμούς πληροφορίας.

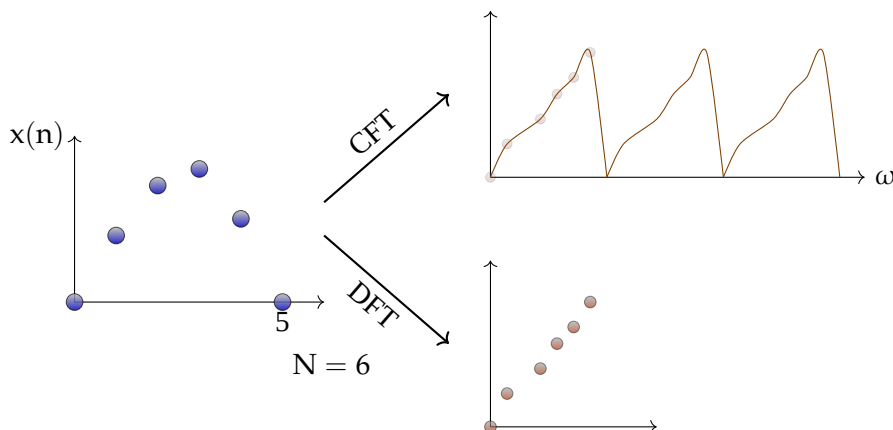
Συγκρίνοντάς τον με τον CFTD (συνεχή μετασχηματισμό Fourier σε διακριτό σήμα):

$$X(e^{j\omega}) \triangleq \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega n}$$

δηλαδή:

$$\underbrace{X(k)}_{\text{DFT}} = \underbrace{X(e^{j\omega})}_{\text{CFT}} \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k}, \quad k = 0, \dots, N-1$$

Η μεταβλητή k εκφράζει ουσιαστικά μία **διακριτή συχνότητα** που αντιστοιχεί στη συχνότητα του CFTD.

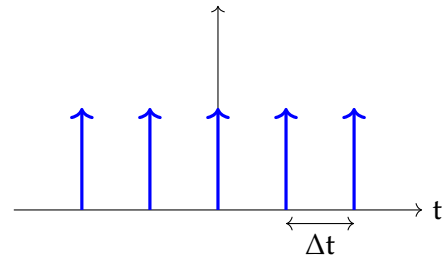


Όπως παρατηρούμε, ο **DFT είναι στην πραγματικότητα ο δειγματοληπτημένος συνεχής μετασχηματισμός Fourier.**

4.1 Χρήσιμα Σήματα

Παλμοσειρά δειγματοληψίας Το αναλογικό σήμα που χρησιμοποιούμε για δειγματοληψία είναι το γνωστό τράινο ώσεων:

$$s_{\Delta t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t)$$



Αυτό, στο συνεχή κόσμο, έχει μετασχηματισμό Fourier όπως έχουμε αποδείξει:

$$s_{\Delta t} \xrightarrow{\text{CFT-C}} \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - n\frac{1}{\Delta t}\right)$$

ή, πιο συνοπτικά, το παραπάνω μπορεί να γραφτεί:

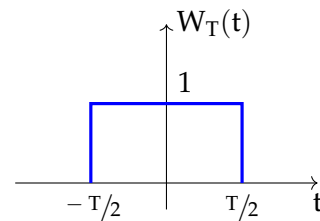
$$s_{\Delta t} \xrightarrow{\text{CFT-C}} F_s S_{F_s}(f)$$

όπου ορίσαμε τη **συχνότητα δειγματοληψίας**:

$$F_s = \frac{1}{\Delta t}$$

Παράθυρο

$$W_T(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$



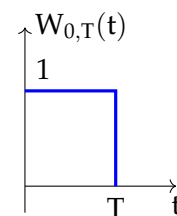
Και από το αναλογικό σήμα γνωρίζουμε ότι:

$$W_T(t) \xrightarrow{\text{CFT-C}} T \text{sinc}(Tf)$$

όπου $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$, και μάλιστα αν $x \rightarrow \infty \implies \text{sinc}(x) = 0$, και $x = 0 \implies \text{sinc}(x) = 1$.

Μετατοπισμένο Παράθυρο Για να έχουμε ακολουθίες που ξεκινούν από $n = 0$, χρησιμοποιούμε ένα παράθυρο που βρίσκεται λίγο πιο μπροστά:

$$W_{0,T} = W_T\left(t - \frac{T}{2}\right) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T \\ 0 & \text{αλλο} \end{cases}$$



Χρησιμοποιώντας ξανά ιδιότητες του αναλογικού σήματος, θα ισχύει:

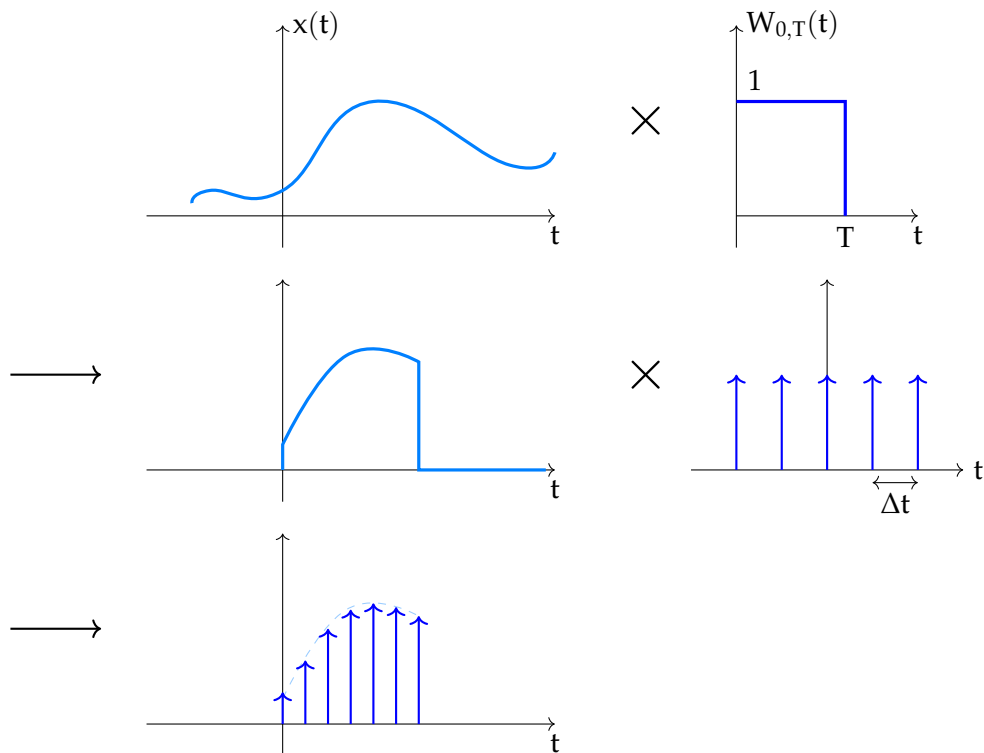
$$W_{0,T}(t) \xrightarrow{\text{CFT-C}} T \text{sinc}(Tf) e^{-j2\pi f T/2}$$

4.2 Η διαδικασία της δειγματοληψίας

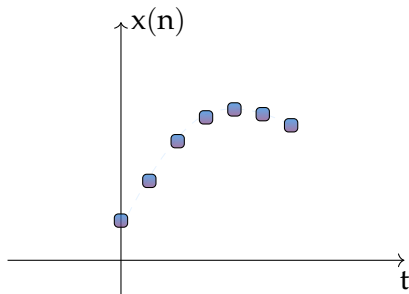
Ο υπολογιστής μας μπορεί να αποθηκεύσει μόνον έναν πεπερασμένο αριθμό δειγμάτων. Επομένως, πρέπει:

1. Να παραθυρώσουμε με ένα $W_{0,T}$ το σήμα, ώστε να μην εκτείνεται στο άπειρο.

2. Να δειγματοληπτήσουμε το σήμα, ώστε να γίνει διακριτό.



Το παραθυροποιημένο και δειγματοληπτημένο σήμα (**sampled & windowed**) ονομάζεται $x_{SW}(t)$. Να σημειωθεί ότι αυτό το σήμα είναι ακόμα αναλογικό, καθώς αποτελείται από συναρτήσεις δ. Για να γίνει ψηφιακό, αρκεί να πάρουμε τις τιμές αυτών των δ.



Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά. Δεδομένου ότι $W_{0,T}$ είναι το παράθυρο και $s_{\Delta t}$ η παλμοσειρά της δειγματοληψίας, έχουμε:

$$\begin{aligned} x_{SW}(t) &= x_W(t) \cdot s_{\Delta t}(t) = [x(t) \cdot W_{0,T}] \cdot s_{\Delta t}(t) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \delta(t - n\Delta t) \cdot x(t) \cdot W_{0,T} \end{aligned}$$

Στο πεδίο των συχνοτήτων, λαμβάνοντας το *συνεχή* μετασχηματισμό Fourier του $x_{SW}(t)$, έχουμε:

$$\begin{aligned} X_{SW}(f) &= \mathcal{F} \{x_{SW}(t)\} = \mathcal{F} \{x(t)W_{0,N\Delta t}(t)S_{\Delta t}\} \\ &= \mathcal{F} \{x(t)\} * \mathcal{F} \{W_{0,N\Delta t}(t) \cdot S_{\Delta t}(\tau)\} \\ &= X(f) * \left[N \Delta t \operatorname{sinc}(N \Delta t f) e^{-j2\pi f \frac{N\Delta t}{2}} \right] * [F_S F_S(f)] \end{aligned}$$

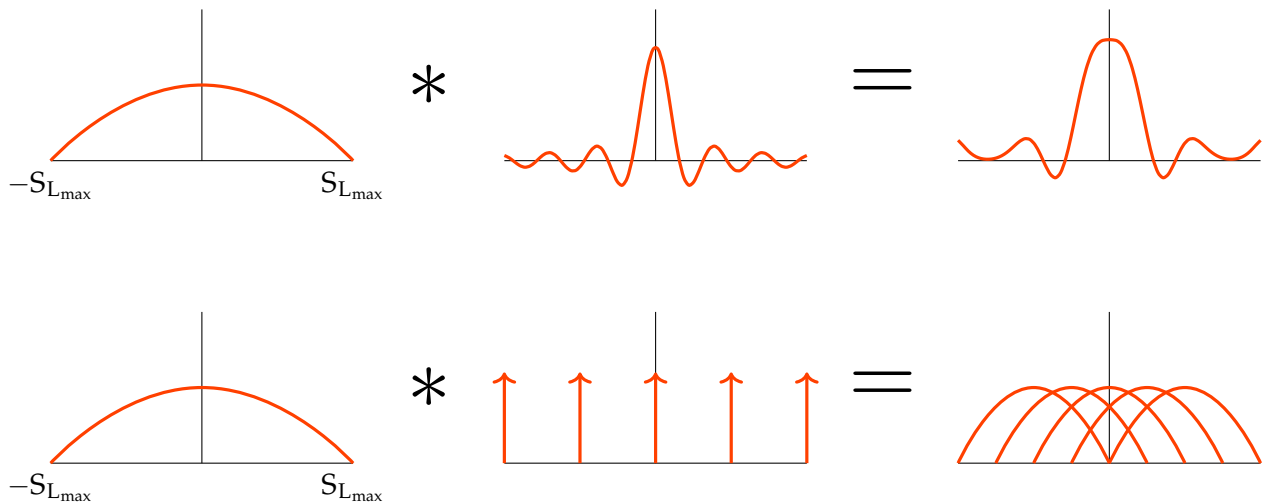
Εδώ παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος που έχει δειγματοληπτηθεί αποτελείται από:

- Το μετασχηματισμό Fourier $X(f)$ του **αρχικού σήματος**

- Την επίδραση της παραθύρωσης με το sinc
- Την επίδραση της παλμοσειράς S_{FS}

Με μερικές παραπάνω πράξεις, προκύπτει τελικά:

$$X_{SW}(f) = X(f) * \left[N \operatorname{sinc}(N \Delta t f) e^{-j2\pi f N \Delta t / 2} \right] * S_{FS}(f)$$



Παρατηρούμε ότι, αφού το σήμα είναι χρονοπερατό μετά την παραθύρωση, το φάσμα του θα είναι άπειρο. Επομένως, μετά από την εφαρμογή της παλμοσειράς, θα είναι βέβαιο ότι θα υπάρχει επικάλυψη. Για να μειωθεί, αυξάνουμε τη συχνότητα δειγματοληψίας, δηλαδή μειώνουμε την απόσταση Δt .

Τώρα πια έχουμε ένα δειγματοληπτημένο ψηφιακό σήμα $x(n)$. Μπορούμε να υπολογίσουμε το *συνεχή* μετασχηματισμό Fourier του:

$$\begin{aligned} X_{SW}(f) &= \mathcal{F} \{ x_{SW}(t) \} = \mathcal{F} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \delta(t - n\Delta t) \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \delta(t - n\Delta t) e^{-j2\pi f t} dt = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi f \Delta t n} \end{aligned}$$

Θέτοντας $f = k\Delta f$, θα ισχύει:

$$\begin{aligned} X_{SW}(k\Delta f) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \Delta t n \Delta f k} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N} (N\Delta f \Delta t) kn} \end{aligned}$$

Στην παραπάνω σχέση, μπορούμε **αυθαίρετα να θέσουμε** τους χρόνους δειγματοληψίας και παραθύρωσης ώστε:

$$\boxed{N\Delta f \Delta t = 1} \tag{3}$$

οπότε θα προκύψει:

$$\boxed{X_{SW}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N} kn}}$$

που είναι ο **ορισμός του DFT** που είχαμε ορίσει και παραπάνω.

Για ένα παράθυρο N δειγμάτων, προκύπτει μια ακολουθία $x(n)$ όπου $n = 0, \dots, N - 1$. Εφαρμόζοντας DFT, θα λάβουμε μια ακολουθία $X(k)$, η οποία αποτελείται από δείγματα του φάσματος του $X_{SW}(f)$ σε θέσεις και συχνότητες $0, \Delta f, 2\Delta f, \dots, (N - 1)\Delta f$.

Ισχύει:

$$\Delta f = \frac{1}{N\Delta t}$$

Αυτό που επιθυμούμε είναι:

- **Μικρό** Δf για να έχουμε αρκετά μεγάλη ανάλυση στη συχνότητα, και μια πιο ακριβή αναπαράσταση του πραγματικού μετασχηματισμού Fourier του αρχικού σήματος.
- **Μεγάλο** N , για να περιορίζεται η **φασματική διαρροή (spectral leakage)** που προκύπτει από το πλάτος του παλμού sinc λόγω της παραθύρωσης.
- **Μικρό** Δt ώστε να περιορίζεται το **aliasing**.

Η τελική μορφή του DFT είναι:

$$X[k] = \left\{ X(f) * \underbrace{\left[N \operatorname{sinc}(N\Delta t f) e^{-j\pi f N \Delta t} \right]}_{L(f)} * \underbrace{S_{F_s}(f)}_{A(f)} \right\}$$

όπου ο όρος $L(f)$ αναφέρεται στη φασματική διαρροή, και ο όρος $A(f)$ αναφέρεται στο aliasing.

4.2.1 Σχέσεις συχνοτήτων

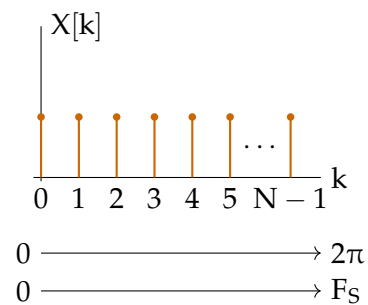
Ο DFT κινείται μεταξύ των τιμών 0 και $N - 1$, οι οποίες αντιστοιχούν άμεσα στις "ψηφιακές" συχνότητες από 0 ως 2π . Για να τις αντιστοιχήσουμε στις πραγματικές αναλογικές συχνότητες, πρέπει να γνωρίζουμε τη συχνότητα δειγματοληψίας.

Έχουμε τρία είδη συχνοτήτων με τα οποία ασχολούμαστε:

- k : Συχνότητα του DFT, $k \in [0, N - 1]$, διακριτή.
- ω : Συχνότητα του DTFT, $\omega \in [0, 2\pi)$, συνεχής.
- Ω : Συχνότητα του CFT, $\Omega \in [0, \infty)$, συνεχής. Στην πράξη, κινείται μεταξύ $\Omega \in [0, F_s)$

Η συχνότητα που μας αφορά είναι η Ω , καθώς είναι η φυσική συχνότητα του σήματος. Μεταξύ των συχνοτήτων ορίζονται σχέσεις:

- $k = N \frac{\omega}{2\pi}$ (Ορισμός 4.1)
- $\omega = k \frac{2\pi}{N}$ (Ορισμός 4.1)
- $\frac{\Omega}{2\pi} = k \Delta f$ (Σελίδα 57)
- $\Omega = \frac{2\pi k}{\Delta t N} = \frac{2\pi k}{N} F_s$ (από (3))
- $k = \frac{N \Delta t \Omega}{2\pi} = \frac{N \Omega}{2\pi F_s}$



Παράδειγμα Δίνεται ένα σήμα:

$$x(t) = e^{j2\pi f_0 t} \rightarrow X(f) = \delta(f - f_0)$$

δειγματοληπτείται με συχνότητα δειγματοληψίας F_s . Παίρνουμε N δείγματα $0, \Delta t, \dots, (N - 1)\Delta t$, όπου $\Delta t = \frac{1}{F_s}$.
Τότε:

$$X[k] = \left[N \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(f - f' - nF_s) \text{sinc}(N\Delta t f') e^{-jn f' N\Delta t} df' \right]_{f=k\Delta f}$$

$$= N \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(N\Delta t(k\Delta f - f_0 - nF_s)) e^{-jn(k\Delta f - f_0 - nF_s)N\Delta t}$$

Ο όρος $k\Delta f - f_0 - nF_s$ εκφράζει τη διαφορά της πραγματικής συχνότητας που υπάρχει στο σήμα, από τη συχνότητα επάνω στην οποία κάνουμε δειγματοληψία του Fourier εμείς. Αν τύχει και πέσουμε ακριβώς επάνω στη σωστή συχνότητα, η sinc δε θα επιδράσει και θα έχουμε ένα καθαρό φάσμα. Όμως αν έχουμε μια μικρή διαφορά, θα "γεμίσουν" κι άλλες συχνότητες στο φάσμα, οι οποίες όμως στο αρχικό σήμα δεν είχαν πληροφορία.

4.3 Aliasing (φασματική επικάλυψη)

Ο παράγοντας $A(f)$ αποτελεί ένα "παράσιτο" που εισάγεται στο σήμα μετά από τον πολλαπλασιασμό του με την παλμοσειρά των δ . Στο ψηφιακό σήμα δεν μπορεί να γίνει 0, καθώς τα φάσματά μας είναι άπειρα, αφού τα σήματα είναι χρονοπερατά (όπως αποδείχθηκε στο αναλογικό σήμα).

Στην ιδανική περίπτωση που το σήμα $x(t)$ είναι ζωνοπερατό, η επικάλυψη μπορεί να καταργηθεί με συχνότητα δειγματοληψίας $F_s > 2F_{\max}$ (συνθήκη Nyquist) (πρωτογενής επικάλυψη).

Στην περίπτωση που το σήμα δεν είναι ζωνοπερατό υπάρχει οπωσδήποτε επικάλυψη, η οποία μπορεί μόνο να μειωθεί αυξάνοντας τη συχνότητα δειγματοληψίας F_s (δευτερογενής επικάλυψη).

4.4 Spectral leakage (φασματική διαρροή)

Ο δεύτερος "ενοχλητικός" όρος είναι ο $L(f)$:

$$L(f) = N \text{sinc}(N\Delta t f) e^{j\pi f N\Delta t}$$

το φάσμα του οποίου συνελίσσεται με το αρχικό φάσμα $X(f)$.

Για παράδειγμα, όταν έχουμε ένα "ημίτονο" $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$, τότε το παραθυρωμένο σήμα θα έχει φάσμα:

$$X(f) * L(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f - f') L(f') df' = N \text{sinc}(N\Delta t(f - f_0)) e^{-j\pi(f-f_0)N\Delta t}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα σημαίνει πως το φάσμα που θα προκύψει δεν θα αποτελείται απλώς από μία δ πάνω στο f_0 , αλλά πάνω στην f_0 θα κάθεται μία sinc. Φασματικό περιεχόμενο δεν θα εμφανίζεται μόνο στην f_0 , αλλά και γύρω από αυτήν, ενώ δεν υπήρχε μεγαλύτερο σήμα. **Αυξάνοντας** το μέγεθος N του παραθύρου, δηλαδή τον αριθμό δειγμάτων που παίρνουμε, **στενεύει** και η επίδραση της sinc.

Άσκηση: Παλιό θέμα

Έστω ένα σήμα:

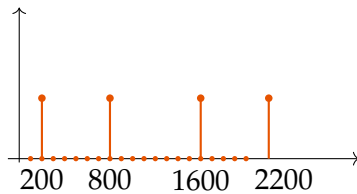
$$x_a(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)$$

(υποθέτουμε πως από τη φυσική του συστήματος γνωρίζουμε πως είναι δύο τα ημίτονα).

Το δειγματοληπτούμε με συχνότητα $F_s = 360$ Hz για διάρκεια $N = 2400$ samples.

Διαπιστώνουμε ότι το φάσμα του DFT είναι:

$$X[k] = \begin{cases} \neq 0, & \text{για } k = 200, k = 800, k = 1600, k = 2200 \\ = 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



Ποιές είναι οι μικρότερες πιθανές τιμές των f_1, f_2 ;

Λύση

Μετά από τη δειγματοληψία, θα δημιουργηθεί ένα σήμα $x[n]$ με $n = 0, 1, \dots, 2399$. Με εφαρμογή του DFT (Discrete Fourier Transform), θα δημιουργηθεί το φάσμα $X[k]$ με $k = 0, 1, \dots, 2399$.

Από το γνωστό τύπο $N \Delta t \Delta f = 1$, έχουμε:

$$\Delta f = \frac{1}{N \Delta t} = \frac{F_s}{N}$$

Επομένως, για όλες τις τιμές του φάσματος:

$$f_1 = k_1 \Delta f = 200 \cdot \frac{360}{2400} = 30 \text{ Hz}$$

$$f_2 = k_2 \Delta f = 800 \cdot \frac{360}{2400} = 120 \text{ Hz}$$

$$f_3 = k_3 \Delta f = 1600 \cdot \frac{360}{2400} = 240 \text{ Hz}$$

$$f_4 = k_4 \Delta f = 2200 \cdot \frac{360}{2400} = 330 \text{ Hz}$$

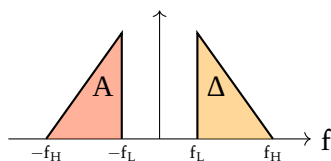
Εφ' όσον ζητάμε τις ελάχιστες δυνατές συχνότητες, απαντάμε με 30 Hz και 120 Hz. Ο περιορισμός αυτός που δίνει η εκφώνηση ουσιαστικά δηλώνει ότι δεν έχουμε πρωτογενές aliasing, δηλαδή ότι η συχνότητα της δειγματοληψίας είναι σωστά επιλεγμένη, ώστε να είναι διπλάσια αυτής του γρηγορότερου ημιτόνου, και να ικανοποιείται το κριτήριο του Nyquist.

Αν δεν υπήρχε ο συγκεκριμένος περιορισμός μάλιστα, οι δυνατές απαντήσεις θα ήταν *άπειρες* σε πλήθος. Μία μεγαλύτερη συχνότητα μπορεί να εμφανίσει alias στην "ορατή" περιοχή $k \in (0, 1200)$. Για παράδειγμα, αν x είναι μια συχνότητα, τότε θα πέφτουμε πάνω στα 30 Hz όταν:

$$30 = x + \kappa 360$$

Δηλαδή για $x = 30, 390, 750, \dots$ Hz.

4.5 Under-Sampling (Υποδειγματοληψία)



$$\left. \begin{array}{l} f_L = 1 \text{ GHz} \\ f_H = 1.01 \text{ GHz} \end{array} \right\} \text{BW} = 10 \text{ MHz}$$

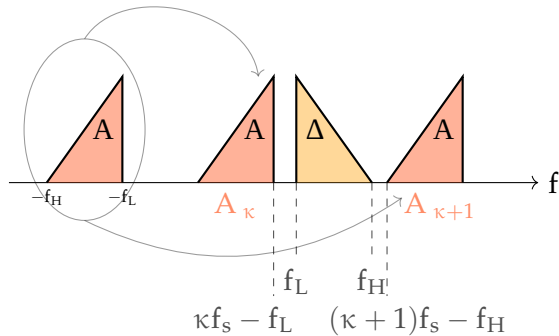
Εστω ότι έχουμε ένα σήμα σε μεγάλη συχνότητα, δηλαδή στο 1 GHz, το οποίο όμως έχει μικρό εύρος ζώνης, της τάξης των 0.01 GHz.

Για να δειγματοληψήσουμε αυτό το σήμα κανονικά, θα πρέπει να έχουμε συχνότητα δειγματοληψίας f_s :

$$f_s > 2f_{\max} = 2f_H = 2.02 \text{ GHz}$$

Αυτή όμως η συχνότητα είναι τεράστια για ένα σήμα το οποίο έχει τόσο μικρό εύρος ζώνης! Επομένως θα προσπαθήσουμε να βρούμε ένα trick για να αποφύγουμε αυτόν τον περιορισμό, χωρίς να έχουμε επικάλυψη του δειγματοληπτημένου σήματος στο φάσμα.

Αφού εφαρμοστεί η δειγματοληψία, αν δεν υπάρχει επικάλυψη, το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος θα μοιάζει ως εξής:



Εδώ υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα δεξί "πλακίδιο" που περιβάλλεται από δύο αριστερά πλακίδια. Το αριστερό πλακίδιο προκύπτει από το αντίγραφο του αρχικού $\begin{matrix} \triangle \\ -f_H - f_L \end{matrix}$ που, λόγω της παλμοσειράς, μετατοπίστηκε κατά μια ακέραια σταθερά κ και $\kappa + 1$.

Για να μην υπάρχει επικάλυψη, θα πρέπει να μην "χτυπούν" τα 3 πλακίδια:

$$\begin{cases} \kappa f_s - f_L \leq f_L & \implies f_s \leq \frac{2f_L}{\kappa} \\ (\kappa + 1)f_s - f_H \geq f_H & \implies f_s \geq \frac{2f_H}{\kappa + 1} \end{cases}$$

άρα:

$$\begin{aligned} \frac{2f_H}{\kappa + 1} &\leq f_s \leq \frac{2f_L}{\kappa} \implies \\ \frac{2f_H}{\kappa + 1} &\leq \frac{2f_L}{\kappa} \implies \kappa f_H \leq (\kappa + 1)f_L \implies \\ \kappa(f_H - f_L) &\leq f_L \implies \kappa \leq \frac{f_L}{f_H - f_L} \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Αυτό που θέλουμε είναι να έχουμε *ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας* f_s (καθώς είναι πιο εύκολη η φυσική υλοποίηση), οπότε επιλέγουμε το μέγιστο κ :

$$\kappa^* = \left\lfloor \frac{f_L}{f_H - f_L} \right\rfloor$$

και μπορούμε να επιλέξουμε απλώς μια f_s που να ικανοποιεί το κριτήριο που βρήκαμε παραπάνω:

$$\frac{2f_H}{\kappa^* + 1} \leq f_s \leq \frac{2f_L}{\kappa^*}$$

Κριτήριο Nyquist Για ένα χαμηλοπερατό σήμα (δηλαδή με ελάχιστη συχνότητα $f_L = 0$), αν εφαρμόσουμε τον παραπάνω τύπο, θα πρέπει να λάβουμε το γνωστό κριτήριο του Nyquist. Πράγματι:

$$\kappa^* = \left\lfloor \frac{f_L}{f_H - f_L} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{f_H} \right\rfloor = 0$$

άρα η συχνότητα δειγματοληψίας είναι:

$$\frac{2f_H}{0 + 1} \leq f_s \leq \frac{2f_L}{0} \implies \boxed{f_s \geq 2f_H}$$

Στη γενική περίπτωση, αν $\kappa^* = \left\lfloor \frac{f_L}{f_H - f_L} \right\rfloor > 0$, τότε:

$$\frac{2f_H}{\left\lfloor \frac{f_L}{f_H - f_L} \right\rfloor + 1} \leq f_s \leq \frac{2f_L}{\left\lfloor \frac{f_L}{f_H - f_L} \right\rfloor}$$

$$\implies 2(f_H - f_L) \leq f_s \leq 2(f_H + f_L) \implies \boxed{f_s > 2(f_H - f_L)} \text{ (γενικότερο κριτήριο Nyquist)}$$

Επομένως, στο παραπάνω παράδειγμα:

$$f_H - f_L = 1.01 - 1 = 10 \text{ MHz}$$

θα είναι $f_s = 2(f_H - f_L) = 20 \text{ MHz}$

Άσκηση: Μαθηματικός διαγωνισμός

Δίνεται η σχέση:

$$\frac{x-1}{x-2} = \frac{x-a}{x-6}$$

Να βρεθούν οι ακέραιοι $a \in \mathbb{Z}$, για τους οποίους η παραπάνω σχέση να καθιστά το $x \in \mathbb{Z}$ ακέραιο.

Λύση

Κάνουμε πράξεις στη δοθείσα σχέση:

$$(x-1)(x-6) = (x-2)(x-a)$$

άρα έχουμε:

$$x^2 - 7x + 6 = x(-2-a)x + 2a \implies x(a-5) = 2a-6 \implies$$

$$x = \frac{2a-6}{a-5} = \frac{2a-10+4}{a-5} = 2 + \frac{4}{a-5}$$

Για να είναι ο x ακέραιος, θα πρέπει και το κλάσμα $\frac{4}{a-5}$ να είναι ακέραιο, δηλαδή το $a-5$ να είναι διαιρέτης του 4. Τα a που το ικανοποιούν αυτό είναι:

$$(a-5) = -4, -2, -1, 1, 2, 4 \implies \underline{a = 1, 3, 4, 6, 7, 9}$$

4.6 Διακριτές σχέσεις Kramers-Kronig

Έστω μια αιτιατή ακολουθία $x(n) \in \mathbb{R} (x(n) = 0 \quad \forall n < 0)$

Γνωρίζουμε ότι ένα σήμα μπορεί να γραφτεί σαν άθροισμα ενός άρτιου και ενός περιττού μέρους (Σελίδα 5):

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

άρα, μετασχηματίζοντας κατά Fourier (που έχει ένα πραγματικό και ένα φανταστικό μέρος):

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e(n)e^{-j\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o(n)e^{-j\omega n}$$

Επιπλέον, εκμεταλλευόμενοι την αρτιότητα & περιττότητα των \sin & \cos έχουμε:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} x_e \cdot \cos \neq 0 \quad \sum_{-\infty}^{\infty} x_e \cdot \sin = 0 \quad \sum_{-\infty}^{\infty} x_o \cdot \cos = 0 \quad \sum_{-\infty}^{\infty} x_o \cdot \sin \neq 0$$

Άρα τελικά:

$$X_R(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e(n)e^{-j\omega n} \implies x_e(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

Ομοίως:

$$jX_I(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o(n)e^{-j\omega n} \implies x_o(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} jX_I(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

Άρα τελικά:

$$\begin{cases} x(n) = x_e(n) + x_o(n) \\ x(-n) = x_e(-n) + x_o(-n) = x_e(n) - x_o(n) \end{cases}$$

Και, όταν το n είναι θετικό ($n > 0$):

$$\begin{cases} x(n) = x_e(n) + x_o(n) \\ 0 = x_e(-n) + x_o(-n) = x_e(n) - x_o(n) \end{cases} \implies \begin{cases} x(n) = 2x_e(n) \\ x(n) = 2x_o(n) \end{cases}$$

Ενώ, επάνω στο $n = 0$, οι σχέσεις γίνονται:

$$\left. \begin{cases} x(0) = x_e(0) + \cancel{x_o(0)} \\ x(0) = x_e(0) - \cancel{x_o(0)} \end{cases} \right\} \implies \boxed{x(0) = x_e(0)}$$

Τελικά:

$$x(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \quad (\text{αιτιατότητα}) \\ x_e(0) & n = 0 \\ 2x_e(n) = 2x_o(n) & n > 0 \end{cases}$$

Οι παραπάνω σχέσεις δηλώνουν πως γνωρίζοντας μόνο το άρτιο ή περιττό κομμάτι μιας αιτιατής & πραγματικής ακολουθίας, μπορούμε να τη βρούμε ολόκληρη (εκτός από την τιμή $n = 0$, που απαιτεί το άρτιο κομμάτι).

Τα παραπάνω οδηγούν στο εξής συμπέρασμα:

Πόρισμα 4.1

Αν $x(n) \in \mathbb{R}$ ένα αιτιατό σήμα:

α) Αν μας δίνεται μόνο το πραγματικό μέρος του μετασχηματισμού Fourier $X_R(e^{j\omega})$ του, τότε μπορώ να βρω το $x(n)$ ως εξής:

$$x(n) = \begin{cases} 2x_e(n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega & n > 0 \\ x_e(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\omega}) d\omega & n = 0 \end{cases}$$

β) Αν μας δίνεται μόνο το φανταστικό μέρος του μετασχηματισμού Fourier $X_I(e^{j\omega})$, έχουμε:

$$x(n) = \begin{cases} 2x_o(n) = \frac{j}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_I(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega & n > 0 \\ x(0) = \text{άγνωστο} & n = 0 \end{cases}$$

Τα παραπάνω δηλώνουν ότι αν έχουμε ένα **πραγματικό σήμα**, ο μετασχηματισμός Fourier του (που περιέχει πραγματικό+φανταστικό μέρος) περιέχει **διπλάσια πληροφορία απ' όση χρειάζεται**. Και αυτό, επειδή μπορούμε μόνο από το **πραγματικό μέρος** του Fourier να λάβουμε **ολόκληρο το σήμα**. Αυτό όμως δεν ισχύει σε μιγαδικά σήματα.

Άσκηση

Έστω ένα πραγματικό αιτιατό σήμα με πραγματικό μέρος Fourier:

$$X_R(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \pi/2 \\ 0 & \pi/2 < |\omega| < \pi \end{cases}$$

Να ανακτηθεί το $x(n)$.

Λύση

Από το πόρισμα Θεώρημα 4.1, έχουμε:

$$\begin{aligned} x(n) &= 2x_e(n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{jn\pi} e^{j\omega n} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{jn\pi} (e^{jn\pi/2} - e^{-jn\pi/2}) = \frac{2}{\pi n} \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Και για την τιμή στο $x(0)$:

$$x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\omega}) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 d\omega = \frac{1}{2}.$$

Κεφάλαιο 5 Σχεδίαση ψηφιακών φίλτρων

5.1 Αναλογικά φίλτρα Butterworth

Ορισμός 5.1: Αναλογικό φίλτρο Butterworth

Το φίλτρο Butterworth τάξης n έχει απόκριση πλάτους:

$$|H_n(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2n}}$$

Ιδιότητες

$$\alpha. |H_n(j\Omega)|^2 \Big|_{\Omega=0} = 1 \quad \forall n$$

$$\beta. |H_n(j\Omega)|^2 \Big|_{\Omega=\Omega_c} = \frac{1}{2} \quad \forall n$$

$$\gamma. |H_n(j\Omega)| \Big|_{\Omega=\Omega_c} = 0.707 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \forall n$$

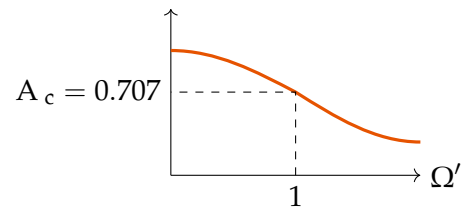
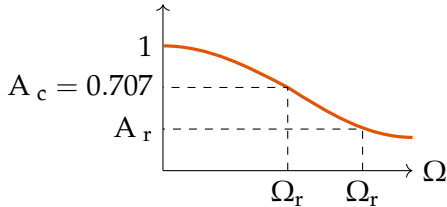
Δηλαδή η Ω_c είναι η **συχνότητα ημίσειας ισχύος** του φίλτρου.

δ. Η $|H_n(j\Omega)|^2$ είναι μονότονη φθίνουσα συνάρτηση του Ω .

ε. Για $\lim_{n \rightarrow \infty} |H_n(j\Omega)|^2$, το $H_n(j\Omega)$ τείνει να γίνει *ιδανικό φίλτρο*.

ς. Η $|H_n(j\Omega)|^2$ **μεγιστοποιείται** για $\Omega = 0$.

Κανονικοποίηση Στη σχεδίαση, μπορούμε να δουλεύουμε σε ένα κανονικοποιημένο φίλτρο, με κεντρική συχνότητα 1. Πράγματι, αν ορίσουμε $\Omega' = \frac{\Omega}{\Omega_c}$, τότε το φίλτρο έχει κέντρο στο $\Omega'_c = 1$.



Ορισμός 5.2: Κανονικοποιημένο Butterworth με $\Omega_c = 1 \text{ rad/s}$

Το κανονικοποιημένο Butterworth είναι:

$$|H_n(j\Omega)|^2 = H_n(j\Omega)H_n(-j\Omega) = \frac{1}{1 + \Omega^{2n}}$$

Στο πεδίο Laplace, αντικαθιστώντας με $s = j\Omega$:

$$|H_n(s)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j}\right)^{2n}}$$

Για να παράξουμε το παραπάνω φίλτρο, χρειάζεται ο πολλαπλασιασμός των συναρτήσεων $H_n(j\Omega)$ και $H_n(-j\Omega)$. Αυτές πρέπει να έχουν τους ίδιους πόλους με τους πόλους του τελικού φίλτρου:

$$1 + \left(\frac{s}{j}\right)^{2n} = 0 \implies s^{2n} = -1(j)^{2n} = (-1)^{n+1}$$

όπου θέτοντας το n , μπορούμε με βάση τη μιγαδική ανάλυση να βρούμε τις ρίζες του παρανομαστή:

$$\begin{cases} n \text{ odd} & \implies s_k = 1 \angle k\pi/n \quad k = 0, 1, \dots, 2n-1 \\ n \text{ even} & \implies s_k = 1 \angle \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \quad k = 0, 1, \dots, 2n-1 \end{cases}$$

όπου μπορούμε να μοιράσουμε τις odd και even ρίζες μεταξύ των $H_n(j\Omega)$ και $H_n(-j\Omega)$.

Άρα έχουμε:

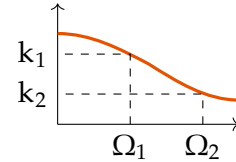
$$H_n(s) = \frac{1}{\prod (s - s_k)} = \frac{1}{B_n}$$

όπου, για να έχουμε ευστάθεια, οι s_k είναι στο *αριστερό ημιπίεδο*, και $B_n(s)$ το πολυώνυμο Butterworth.

Επέκταση Η συνάρτηση Butterworth που βρήκαμε παραπάνω είναι εξ' ορισμού *χαμηλοπερατή*. Για το σχεδιασμό άλλων ειδών φίλτρων Butterworth, μπορούμε να συνδυάσουμε πολλά Butterworth φίλτρα κατάλληλα. Στα τυπολόγια, υπάρχουν εξισώσεις που πραγματοποιεί τη σχεδίαση του φίλτρου, δεδομένων των προδιαγραφών.

Παράδειγμα σχεδιασμού Μπορεί να μας ζητηθούν προδιαγραφές:

- Για $\Omega < \Omega_1$: $10 \log |H_n(j\omega)|^2 \geq k_1 \geq 0$
- Για $\Omega > \Omega_2$: $10 \log |H_n(j\omega)|^2 \leq k_2 \leq 0$



Επομένως, λύνοντας τις ανισώσεις των σημειώσεων (θέτοντας $H(\Omega) = \frac{1}{1+(\frac{\Omega}{\Omega_c})^{2n}}$), θα προκύψει:

$$n = \left\lceil \frac{\log \left[\frac{10^{-k_1/10} - 1}{10^{-k_2/10} - 1} \right]}{2 \log (\Omega_1/\Omega_2)} \right\rceil$$

με τη δυνατότητα επιλογής οποιουδήποτε Ω_c εντός της περιοχής:

$$\frac{\Omega_1}{(10^{-k_1/10} - 1)^{1/2n}} \leq \Omega_c \leq \frac{\Omega_2}{(10^{-k_2/10} - 1)^{1/2n}}$$

5.2 Αριθμητική επίλυση διαφορικής εξίσωσης

Τα αναλογικά φίλτρα και συστήματα εκφράζονται από διαφορικές εξισώσεις. Αν καταφέρουμε να μετασχηματίσουμε αυτά τα συστήματα με κάποιον τρόπο στον ψηφιακό κόσμο, θα μπορούμε να τα εφαρμόσουμε και στα ψηφιακά μας σήματα.

Οι "αναλογικές" διαφορικές εξισώσεις έχουν γενικά την εξής μαθηματική μορφή:

$$\sum_{k=0}^N c_k \frac{d^k}{dt^k} y_a(t) = \sum_{k=0}^M d_k \frac{d^k}{dt^k} x_a(t)$$

και, εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace:

$$H_a(s) = \frac{\sum_{k=0}^M d_k s^k}{\sum_{k=0}^N c_k s^k}$$

Ορισμός 5.3: Διαφορά k-τάξης

Για την αριθμητική επίλυση των διαφορικών εξισώσεων, ορίζουμε αναδρομικά τις **διαφορές k τάξης**:

$$\begin{aligned} \nabla^{(1)} [y(n)] &= \frac{y(n) - y(n-1)}{T} \\ \nabla^{(k)} [y(n)] &= \nabla^{(1)} [\nabla^{(k-1)} [y(n)]] \end{aligned}$$

Η χρησιμότητά τους έγκειται στο ότι μοιάζουν με τις κλασικές παραγώγους:

$$\left. \frac{d}{dt} y_a(t) \right|_{t=nT} \approx \frac{y(n) - y(n-1)}{T}$$

επομένως προσεγγιστικά μπορούμε άμεσα να **διακριτοποιήσουμε** την αρχική διαφορική εξίσωση:

$$\sum_{k=0}^N c_k \nabla^{(k)} y_a(nT) \approx \sum_{k=0}^M d_k \nabla^{(k)} x_a(nT)$$

και, εφαρμόζοντας **μετασχηματισμό Z**:

$$\mathcal{Z} \left\{ \nabla^{(1)} [y(n)] \right\} = \mathcal{Z} \left[\frac{y(n) - y(n-1)}{T} \right] = Y(z) \left[\frac{1 - z^{-1}}{T} \right]$$

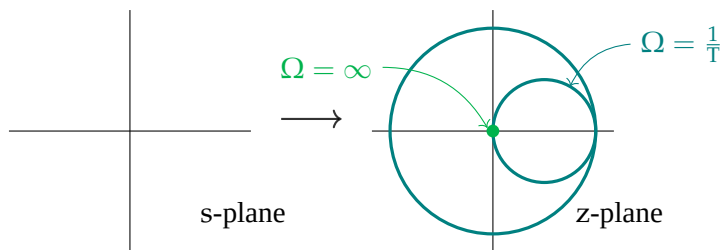
$$\mathcal{Z} \left\{ \nabla^{(k)} [y(n)] \right\} = Y(z) \left[\frac{1 - z^{-1}}{T} \right]^k$$

Δηλαδή τελικά:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^N d_k \left[\frac{1-z^{-1}}{T} \right]^k}{\sum_{k=0}^N c_k \left[\frac{1-z^{-1}}{T} \right]^k}$$

Από το παραπάνω αποτέλεσμα προκύπτει πως μπορούμε να γράψουμε το $H(z)$ από το $H(s)$ με μια απλή αντικατάσταση μεταβλητής:

$$H(z) = H(s) \Big|_{s \leftarrow \frac{1-z^{-1}}{T}}$$



Ο μετασχηματισμός που πραγματοποιούμε είναι ο εξής:

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T}$$

και πραγματοποιούμε πράξεις:

$$z = \frac{1}{1 - sT} = \frac{1}{1 - j\Omega T} = \frac{1}{1 + \Omega^2 T^2} + j \frac{\Omega T}{1 + \Omega^2 T^2} = \mathfrak{X} + j\mathfrak{Y}$$

όπου ισχύει $\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 = 1$ και $\left(\mathfrak{X} - \frac{1}{2}\right)^2 + \mathfrak{Y}^2 = \frac{1}{4}$

Δεν υπάρχει ακριβής απεικόνιση των αναλογικών συχνοτήτων σε ψηφιακές. Όμως μπορεί να απαιτηθεί οι αναλογικές συχνότητες να είναι πολύ κοντά στο μοναδιαίο κύκλο, παίρνοντας τον ελάχιστο δυνατό χρόνο δειγματοληψίας T . Επίσης, αν ένα αναλογικό σύστημα είναι ευσταθές, τότε αναγκαστικά και το ψηφιακό αντίστοιχο θα είναι ευσταθές.

Σημείωση Ορίζεται και η *προς τα εμπρός* διαφορά (forward difference):

$$\Delta^{(1)} y(n) = \frac{y(n+1) - y(n)}{T}$$

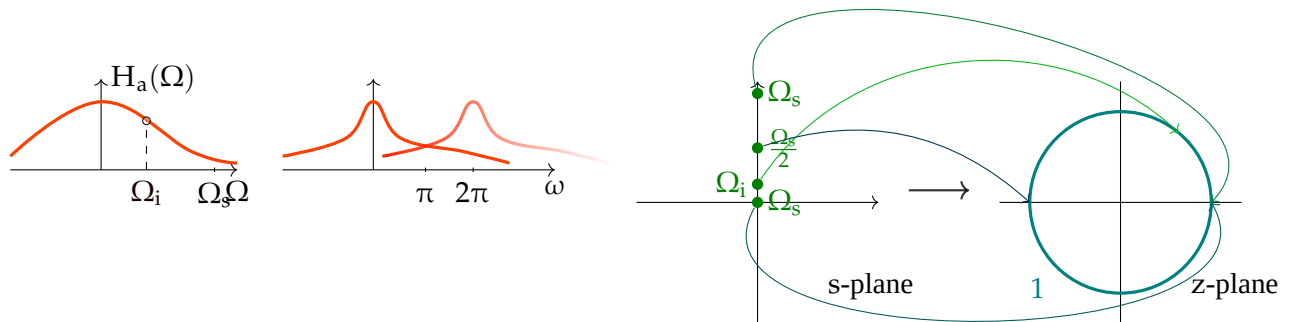
$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=nT} \simeq \frac{y(n+1) - y(n)}{T}$$

Η παραπάνω διαφορά ορίζει διαφορετική απεικόνιση στις ψηφιακές συχνότητες $s \leftarrow \frac{z-1}{T}$, και δεν εγγυάται ευστάθεια και στον ψηφιακό κόσμο.

Επιπλέον, ορίζονται κεντρικές διαφορές ως εξής:

$$\left. \frac{dy(h)}{dt} \right|_{t=nT} = \frac{y(n+1) - y(n-1)}{2T} \quad \text{με } s \leftarrow \frac{z + z^{-1}}{T}$$

Ένα παράδειγμα Έστω ότι δειγματοληπτούμε ένα αναλογικό σήμα $H_a(\Omega)$, με συχνότητα δειγματοληψίας Ω_s , που απεικονίζεται στον ψηφιακό κόσμο μέσω της $\omega \in [0, 2\pi)$. Το $\omega = 2\pi$ αντιστοιχεί στην αναλογική συχνότητα Ω_s , και το $\omega = \pi$ αντιστοιχεί στην $\frac{\Omega_s}{2}$.

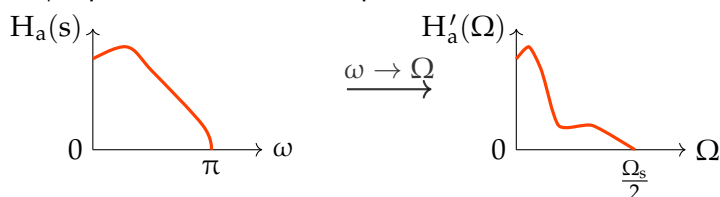


Η σχέση που συνδέει την "αναλογική" με την "ψηφιακή" συχνότητα είναι γραμμική:

$$\omega = \frac{2\pi\Omega}{\Omega_s}$$

Επίσης, αν φανταστούμε ότι το σήμα είχε μια συχνότητα $\Omega_H > \Omega_s$, μεγαλύτερη δηλαδή από το μισό της συχνότητας δειγματοληψίας, αυτή θα εμφανιζόταν σε λανθασμένο σημείο στο φάσμα, οδηγώντας σε παραπλανητικά αποτελέσματα, όπως έχουμε δει στην [Ενότητα 4.3](#).

Μετάφραση ψηφιακής σε αναλογική συχνότητα Έστω ότι έχουμε ένα φίλτρο Butterworth. Το αρχικό αναλογικό φάσμα του είναι πολύ καθαρό:



Στον ψηφιακό κόσμο όμως, το φάσμα προκύπτει ελαφρά παραμορφωμένο. Αν μεταφράσουμε την ψηφιακή συχνότητα σε αναλογική με τη σχέση $\omega = \frac{2\pi\Omega}{\Omega_s}$, θα λάβουμε ένα άλλο σήμα $H_a'(\Omega)$, που εν γένει θα είναι ελαφρά **διαφορετικό** από το αρχικό $H_a(\Omega)$.

Για τις forward διαφορές Παραπάνω ορίσαμε ως εξής, πέρα από τις προς τα πίσω διαφορές που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω, και τις προς τα εμπρός διαφορές:

$$\Delta^{(1)}y(n) = \frac{y(n+1) - y(n)}{T}$$

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=nT} \simeq \frac{y(n+1) - y(n)}{T}$$

Εδώ θα αποδείξουμε πως υπό συνθήκη (αλλά όχι πάντα) οδηγούν σε *ευστάθεια* και του ψηφιακού συστήματος, αν το αντίστοιχο αναλογικό είναι *ασταθές*.

Με πράξεις όπως και στις προς τα πίσω διαφορές, βρίσκουμε την αντιστοιχία μεταξύ των πόλων του s-plane και z-plane:

$$s \leftarrow \frac{z-1}{T} \quad (\text{όπου } T = \Delta t)$$

Έχουμε:

$$s = \frac{z-1}{T} \implies z = sT + 1 = (a + jb)T + 1$$

όπου η αναλογική ευστάθεια σημαίνει πως $a < 0$.

$$z = (aT + 1) + jbT$$
$$|z|^2 = (aT + 1)^2 + b^2T^2 = a^2T^2 + 2aT + 1 + b^2T^2$$

Από τη θεωρία, το ψηφιακό σύστημα είναι ευσταθές αν για τους πόλους του ισχύει $|z|^2 < 1$:

$$a^2T^2 + 2aT + 1 + b^2T^2 < 1$$
$$T(a^2 + b^2) < -2a \implies T < \frac{-2a}{(a^2 + b^2)}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα σημαίνει ότι **για κάθε πόλο $a + jb$, θα πρέπει να επιλέξουμε συχνότητα δειγματοληψίας τέτοια ώστε $T < \frac{-2a}{a^2+b^2}$ για να έχουμε ευστάθεια και στο ψηφιακό σύστημα.**

Για πολλούς πόλους $p_i = a_i + jb_i$, η παραπάνω συνθήκη γράφεται ως εξής:

$$T < \frac{-2A}{B}$$

όπου:

$$A = \max_i \{ \operatorname{Re} \{ p_i \} \}$$
$$B = \max_i \{ |p_i|^2 \}$$

Άσκηση για το σπίτι

Να παρασταθεί γεωμετρικά η απεικόνιση του φανταστικού άξονα από το s-plane στο z-plane.

Παιχνίδι για το σπίτι

Να υλοποιηθεί φίλτρο Butterworth (π.χ. της μορφής $H(s) = \frac{1}{s+1}$) και να τοποθετηθεί σε ανθρώπινη φωνή. Να ακουστεί η διαφορά της φωνής όταν εφαρμοστεί φίλτρο Butterworth σε αυτήν.

5.3 Διγραμμικός Μετασχηματισμός

Έστω η διαφορική εξίσωση:

$$a_1 \frac{d}{dt} y_a(t) + a_0 y_a(t) = b_0 x(t)$$

όπου το y_a δηλώνει ένα *analog* σήμα εισόδου.

Το σύστημα αυτό έχει, κατά Laplace, συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(s) = \frac{b_0}{a_1 s + a_0}$$

και η λύση του είναι:

$$y_a(t) = \int_{t_0}^t y_a'(t) dt + y_a(t_0)$$

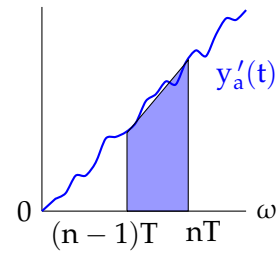
όπου $y_a'(t) = \frac{dy_a(t)}{dy_t}$.

Γενικότερα, η παράγωγος γράφεται (από τη ΔΕ) ως εξής:

$$y_a'(t) = \frac{b_0 x(t) - a_0 y_a(t)}{a_1}$$

Μπορούμε να διακριτοποιήσουμε τη λύση του ως εξής:

$$y_a(nT) = \int_{(n-1)T}^{nT} y_a'(t) dt + y_a [(n-1)T]$$



και, μπορούμε αριθμητικά να προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα (με τη μέθοδο τραπεζίου):

$$\begin{aligned} y_a(nT) &= T \frac{y_a'((n-1)T) + y_a'(nT)}{2} + y_a [(n-1)T] \\ &= \frac{T}{2} \left\{ -\frac{a_0}{a_1} y_a(nT) + \frac{b_0}{a_1} x(nT) - \frac{a_0}{a_1} y_a [(n-1)T] + \frac{b_0}{a_1} x [(n-1)T] \right\} + y_a [(n-1)T] \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, μετασχηματίζουμε κατά Z :

$$Y(z) = \frac{T}{2} \left[-\frac{a_0}{a_1} Y(z) + \frac{b_0}{a_1} X(z) - \frac{a_0}{a_1} z^{-1} Y(z) + \frac{b_0}{a_1} z^{-1} X(z) \right] + z^{-1} Y(z)$$

και με λίγες πράξεις μπορούμε να βρούμε και τη *συνάρτηση μεταφοράς του ψηφιακού συστήματος*:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \dots = \frac{b_0}{a_1 \left(\frac{2}{T} \right) \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) + a_0}$$

Αν θυμηθούμε ότι στο αναλογικό σύστημα η συνάρτηση μεταφοράς ήταν $H(s) = \frac{b_0}{a_1 s + a_0}$, τότε ο διγραμμικός μετασχηματισμός μπορεί να περιγραφεί από την αντικατάσταση:

$$s \rightarrow \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

Ο **διγραμμικός μετασχηματισμός** επομένως είναι μία ακόμα μέθοδος αριθμητικής αναπαράστασης & επίλυσης ενός αναλογικού συστήματος, ο οποίος μπορεί να προκύψει, όπως και οι παραπάνω μετασχηματισμοί, θέτοντας το s της συνάρτησης μεταφοράς σε μία κατάλληλη τιμή.

Μελέτη απεικόνισης συχνότητων Ένα ερώτημα που πρέπει να απαντήσουμε είναι αν απεικονίζονται όλες οι αναλογικές συχνότητες $s = j\Omega$ στον ψηφιακό κόσμο.

Θέλουμε το $j\Omega$ να απεικονιστεί στο $e^{j\omega}$. Τότε θέτουμε:

$$\begin{aligned} j\Omega &= \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} = \frac{2}{T} \frac{1 - \cos \omega + j \sin \omega}{1 + \cos \omega - j \sin \omega} \\ &= \frac{2}{T} \frac{(1 - \cos \omega + j \sin \omega)(1 + \cos \omega + j \sin \omega)}{(1 + \cos \omega)^2 + \sin^2 \omega} \\ &= \frac{2}{T} \frac{(1 + j \sin \omega)^2 - \cos^2 \omega}{(1 + \cos \omega)^2 + \sin^2 \omega} \\ &= \frac{2}{T} \frac{1 - \sin^2 \omega + 2j \sin \omega - \cos^2 \omega}{(1 + \cos \omega)^2 + \sin^2 \omega} \implies \\ \Omega &= \frac{2}{T} \frac{\sin \omega}{1 + \cos \omega} = \frac{2}{T} \tan \left(\frac{\omega}{2} \right) \end{aligned}$$

Επομένως υπάρχει απεικόνιση του $j\Omega \rightarrow e^{j\omega}$, η οποία είναι η $\Omega = \frac{2}{T} \tan \left(\frac{\omega}{2} \right)$, ή αντιστρόφως $\omega = 2 \tan^{-1} \frac{\Omega T}{2}$.



Μερικά παραδείγματα της συχνότητας ω_{bl} που προκύπτει από το διγραμμικό μετασχηματισμό (σε σύγκριση με τη συχνότητα $\omega_{ST} = \Omega T$ που προκύπτει από το θεώρημα δειγματοληψίας) είναι:

Ω	ω_{bl}	ω_{ST}
0	0	0
$\frac{2}{T}$	$\pi/2$	2
∞	π	∞
$\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$	$2 \tan^{-1}(\pi) \approx 2 \cdot 1.26262 \approx 2 \cdot 0.402\pi$	2π

Σε αυτόν το μετασχηματισμό, παρατηρούμε πως όλες οι συχνότητες από το 0 ως το ∞ απεικονίζονται από το 0 ως το π . Αυτό βέβαια απαιτεί μια στρέβλωση και ανομοιομορφία.

Μελέτη ευστάθειας Έχουμε:

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \implies z = \frac{1 + \frac{sT}{2}}{1 - \frac{sT}{2}}$$

Έστω ότι υπάρχει ένας πόλος $s_0 = a + jb$.

$$z_0 = \frac{1 + s_0 \frac{T}{2}}{1 - s_0 \frac{T}{2}} = \frac{1 + (a + jb) \frac{T}{2}}{1 - (a + jb) \frac{T}{2}} = \frac{\left(1 + \frac{Ta}{2}\right) + j \frac{bT}{2}}{\left(1 - \frac{Ta}{2}\right) - j \frac{bT}{2}}$$

Αν έχουμε ένα ευσταθές αναλογικό σύστημα, ο πόλος θα έχει $a < 0$, οπότε:

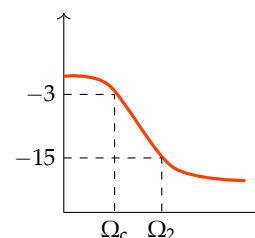
$$|z_0|^2 = \frac{\left(1 + \frac{Ta}{2}\right)^2 + \frac{b^2 T^2}{4}}{\left(1 - \frac{Ta}{2}\right)^2 + \frac{b^2 T^2}{4}}$$

και, με λίγα μαθηματικά, ισχύει $|z_0| < 1$. Επομένως, και το ψηφιακό σύστημα είναι ευσταθές.

Άσκηση

Να σχεδιαστεί ψηφιακό φίλτρο με Διγραμμικό Μετασχηματισμό, το οποίο να αντικαταστήσει ένα αναλογικό χαμηλοπερατό, με μονότονη απόκριση:

$$\begin{aligned} \Omega_c &= 2\pi \cdot 500 \text{ rad/s} & -3 \text{ dB} \\ \Omega \geq \Omega_2 &= 2\pi \cdot 750 \text{ rad/s} & < k_2 = -15 \text{ dB} \end{aligned}$$



Λύση

Θα υλοποιήσουμε ένα φίλτρο Butterworth, με χρόνο δειγματοληψίας $\Delta t = 0.5 \cdot 10^{-3}$ s. Αυτός ο χρόνος οδηγεί σε συχνότητα δειγματοληψίας μεγαλύτερη της συχνότητας Nyquist.

Έχουμε:

$$\Omega_1 = 2\pi \cdot 500 \quad k_1 = -3$$

$$\Omega_2 = 2\pi \cdot 750 \quad k_2 = -15$$

Από τον τύπο που βρήκαμε για το Butterworth, έχουμε:

$$n = \left\lceil \frac{\log \left(10^{-\frac{k_1}{10}} - 1 \right) / \left(10^{-\frac{k_2}{10}} - 1 \right)}{2 \log \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_2} \right)} \right\rceil$$
$$= \lceil 4.2254 \dots \rceil = 5$$

Άρα, από τυπολόγιο, το κανονικοποιημένο Butterworth είναι:

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+0.618s+1)(s^2+1.618s+1)}$$

και, αν θέλουμε την κανονική συχνότητα:

$$H_a(s) = H_s(s) \Big|_{s \leftarrow \frac{s}{\Omega_c=2\pi \cdot 500}}$$

άρα:

$$H_a(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\Omega_0}\right) \left(\left(\frac{s}{\Omega_0}\right)^2 + 0.618 \left(\frac{s}{\Omega_0}\right) + 1 \right) \left(\left(\frac{s}{\Omega_0}\right)^2 + 1.618 \left(\frac{s}{\Omega_0}\right) + 1 \right)}$$

Για να μετασχηματίσουμε στη συχνότητα και να βρούμε το $H(z)$, αρκεί να θέσουμε $s \leftarrow \frac{2}{\Delta t} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ στο παραπάνω.

Η σχεδιάσή μας όμως αυτή οδηγεί σε **λάθος** αποτέλεσμα, καθώς δεν λαμβάνει υπ' όψιν το μετασχηματισμό που προκύπτει από το διγραμμικό μετασχηματισμό για τη ψηφιοποίηση του συστήματος. Πρώτα, υπολογίζουμε τις **ψηφιακές συχνότητες** $\omega_1 = \Omega_1 \Delta t = 0.5\pi$, $\omega_2 = \Omega_2 \Delta t = 0.75\pi$. Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό $\Omega = \frac{2}{\Delta t} \tan \left(\frac{\omega}{2} \right)$ έχουμε:

$$\Omega'_1 = \frac{2}{\Delta t} \tan \left(\frac{\omega_1}{2} \right) = 4000 \text{ rad/s}$$

$$\Omega'_2 = \frac{2}{\Delta t} \tan \left(\frac{\omega_2}{2} \right) = 9657 \text{ rad/s}$$

και η σχεδίαση μπορεί να γίνει:

$$n = \left\lceil \frac{\log \left(10^{-\frac{k_1}{10}} - 1 \right) / \left(10^{-\frac{k_2}{10}} - 1 \right)}{2 \log \left(\frac{\Omega'_1}{\Omega'_2} \right)} \right\rceil = \lceil 1.9438 \rceil = 2$$

με συνάρτηση μεταφοράς (από τυπολόγιο, σελ. 484 βιβλίου Hayes):

$$H_2(s) = \frac{1}{s^2 + 1.4142s + 1}$$

στη μη-κανονικοποιημένη συχνότητα:

$$H'_a(s) = H_2(s) \Big|_{s \rightarrow \frac{s}{\Omega_c}}$$

και στην ψηφιακή:

$$H(z) = H'_a(s) \Big|_{s \leftarrow \frac{2}{\Delta t} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

5.4 Συνελκτικά ολοκληρώματα

Κάποιες διαφορικές εξισώσεις, δεδομένων των γνώσεων που έχουμε για την *κρουστική απόκριση*, λύνονται ως εξής:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t - \tau) d\tau \text{ (για αιτιατό σύστημα)} \end{aligned}$$

Θα μπορούσαμε να σκεφτούμε να μετατρέψουμε σε άθροισμα το ολοκλήρωμα, θέτοντας $t = nT$, άρα $y(nT) = T \sum_{k=-\infty}^n x(kT)h(nT - kT) \implies y(n) = T \sum_{k=-\infty}^n x(k)h(n - k) = Tx(n) * h(n)$. Δηλαδή, γνωρίζοντας την κρουστική απόκριση του αναλογικού συστήματος, και δειγματοληπώντας κατάλληλα, μπορούμε να μοντελοποιήσουμε και το ψηφιακό σύστημα.

Έστω ένα φίλτρο $H_a(s)$:

$$H_a(s) = \frac{1}{s + a}$$

με κρουστική απόκριση:

$$h_a(t) = e^{-at}u(t)$$

την οποία μπορούμε να δειγματοληπτήσουμε ως εξής:

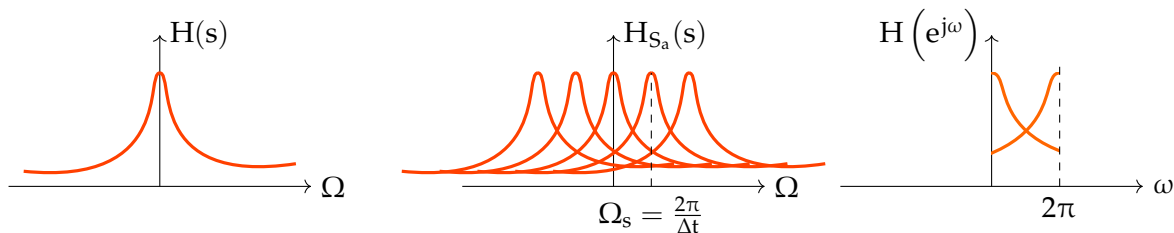
$$h[n] = h_a(nT) = e^{-anT}u(n)$$

Αφού το παραπάνω είναι η κρουστική απόκριση του ψηφιακού συστήματος, για να περιγράψουμε το ίδιο το σύστημα έχουμε:

$$\begin{aligned} H(z) &= \mathcal{ZT} \{h(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT} z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-aT}}{z} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{e^{-aT}}{z}} \quad \text{με} \quad \left| \frac{e^{-aT}}{z} \right| < 1 \\ &= \frac{z}{z - e^{-aT}} \end{aligned}$$

Μελετώντας τους πόλους, παρατηρούμε ότι ο πόλος του αναλογικού συστήματος είναι $(s_0) = -a$, και ο πόλος του ψηφιακού είναι $(z_0) = e^{-aT}$. Αν $(s_0) < 0$, τότε $(z_0) < 1$, άρα η ευστάθεια του αναλογικού συστήματος οδηγεί και στην ευστάθεια του ψηφιακού.

Μελετώντας το σύστημα στη συχνότητα, παρατηρούμε ότι έχουμε αποτελέσματα αντίστοιχα με αυτά του θεωρήματος δειγματοληψίας, καθώς δειγματοληπτούμε την $h(t)$. Δεν θα υπάρχει καμία στρέβλωση στη συχνότητα.



5.4.1 Ακρίβεια της ψηφιακής προσέγγισης

Έστω ένα σύστημα, που μετά από την αντικατάσταση $z \leftarrow e^{j\omega}$, γίνεται:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Ae^{j\omega}}{e^{j\omega} - e^{-aT}}$$

και το ισοδύναμο δειγματοληπτημένο:

$$H_{\text{eq}}(j\Omega) = H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega \leftarrow \Omega T} = \frac{Ae^{j\Omega T}}{e^{j\Omega T} - e^{-aT}} \quad \text{με } \Omega < \frac{\pi}{T}$$

$$H_a(j\Omega) = \frac{A}{j\Omega + a}$$

$$\begin{aligned} H_{\text{eq}}(j\Omega) &= \frac{A}{1 - (1 - aT) \cos(\Omega T) + j(1 - aT) \sin(\Omega T)} \\ &= \frac{A/T}{1 + j\Omega - jT\Omega} = \frac{A}{T} \frac{1}{a + j\Omega} \\ &= \frac{A}{1 - 1 + aT \cos(\Omega T) + j \sin(\Omega T) - jaT \sin(\Omega T)} \\ &\cong \frac{A}{aT + j\Omega T - jaT^2\Omega} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι μειώνοντας το χρόνο δειγματοληψίας T , μειώνεται και η παραμόρφωση που προκαλείται λόγω της προσέγγισης.

Παράδειγμα Έστω ένα σύστημα $h_a(t)$ με είσοδο $u(t)$ και έξοδο $s_a(t)$. Μέσω της παραπάνω διαδικασίας, μετατρέπουμε την $h_a(t)$ σε $h(n)$, για να πάρουμε έξοδο $s(n)$, και το σύστημα να έχει μετασχηματισμό Z τον $H(z)$.

Ερώτημα Αν $H(n) = h_a(nT)$, είναι ή όχι $s(n) = \sum_{k=-\infty}^n h_a(kT)$;

Έχουμε:

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k) \xrightarrow{H(z)} s(n) = \sum_{k=-\infty}^n h(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_a(kT)$$

Άρα είναι.

Ερώτημα Αν $s(n) = s_a(nT)$, είναι ή όχι $h(n) = h_a(nT)$;

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \delta(n) &= u(n) - u(n-1) \xrightarrow{H(z)} h(n) = s(n) - s(n-1) \\ &= s_a(nT) - s_a((n-1)T) \end{aligned}$$

όπου:

$$s_a(nT) = \int_{-\infty}^{nT} h(\tau)u(nT - \tau) d\tau = \int_{-a}^{nT} h(\tau) d\tau$$
$$s_a((n-1)T) = \dots = \int_{-\infty}^{(n-1)T} h(\tau) d\tau$$

άρα:

$$s_a(nT) - s_a((n-1)T) = \int_{(n-1)T}^{nT} h(\tau) d\tau \neq h_a(nT)$$

δηλαδή η δοθείσα σχέση δεν ισχύει.

Ερώτηση για το σπίτι

Ποιό είναι το νόημα της παραπάνω άσκησης;

Άσκηση

Έστω το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών:

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = x(n) - \frac{1}{4}x(n-1) \quad n \geq 0$$

- 1) Να βρεθεί η **κρουστική απόκριση** $h(n)$
- 2) Να βρεθεί η $H(z)$ είτε ως $\frac{Y(z)}{X(z)}$, είτε ως $\mathcal{ZT}\{h(n)\}$.
- 3) Να βρεθεί η $y(n)$ αν $x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$ με $y(-1) = 0$.
- 4) Να βρεθεί η $y(n)$ αν $x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$ και $y(-1) = 1$.
- 5) Αν $x(n) = \delta(n)$ και $y(-1) = 1$, ποιά θα είναι η $y(n)$;

Λύση

Αφού $n \geq 0$, το σύστημα είναι αιτιατό.

- 1) α) **α' τρόπος**

Το ότι μας ζητείται κρουστική απόκριση, σημαίνει πρακτικά ότι οι αρχικές συνθήκες τίθενται ίσες με 0, και ότι η είσοδος είναι $x(n) = \delta(n)$.

Λαμβάνουμε παραδείγματα τιμών:

$$\begin{aligned} n=0 & \quad y(0) - \frac{1}{2}y(-1) = \delta(0) - \frac{1}{4}\delta(-1) \implies y(0) = 1 \\ n=1 & \quad y(1) - \frac{1}{2}y(0) = \delta(1) - \frac{1}{4}\delta(0) \implies y(1) = \frac{1}{4} \\ n=2 & \quad y(2) - \frac{1}{2}y(1) = \delta(2) - \frac{1}{4}\delta(1) \implies y(2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \\ n=3 & \quad y(3) - \frac{1}{2}y(2) = 0 \implies y(3) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{4} \\ n = \underset{>3}{k} & \quad y(k) - \frac{1}{2}y(k-1) = 0 \implies y(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Δηλαδή, επαγωγικά βρίσκουμε ότι:

$$y(n) = h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{4} \text{ για } n > 3$$

ή, γενικότερα:

$$\begin{aligned} y(n) = h(n) &= \delta(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{4} u(n-1) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[u(n) - \frac{1}{2} u(n-1) \right] \end{aligned}$$

Παρατηρούμε την ενδιαφέρουσα συμπεριφορά του συστήματος επάνω στο σημείο 0, η οποία διαφέρει από την υπόλοιπη δυναμική συμπεριφορά, λόγω των "μεταβατικών" όρων με τα δ.

β) β' τρόπος

Θα χρησιμοποιήσουμε το μετασχηματισμό \mathcal{Z} (αδιαφορώντας αν είναι μονόπλευρος ή δίπλευρος - αφού εξ' ορισμού οι αρχικές συνθήκες πριν το 0 είναι μηδενικές).

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{ZT} \left\{ y(n) - \frac{1}{2} y(n-1) \right\} &= \mathcal{ZT} \left\{ x(n) - \frac{1}{4} x(n-1) \right\} \\ Y(z) - \frac{1}{2} z^{-1} Y(z) &= X(z) - \frac{1}{4} z^{-1} X(z) \\ Y(z) \left[1 - \frac{1}{2} z^{-1} \right] &= X(z) \left[1 - \frac{1}{4} z^{-1} \right] \implies \\ \frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) &= \frac{1 - 1/4z^{-1}}{1 - 1/2z^{-1}} = \frac{z - 1/4}{z - 1/2} = \frac{z}{z - 1/2} - \frac{1/4}{z - 1/2} \quad \text{ROC} > 1/2 \end{aligned}$$

Άρα η κρουστική απόκριση, ως αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace, είναι:

$$h(n) = \mathcal{I}\mathcal{ZT} \{ H(z) \}$$

$$\text{Έχουμε ότι: } \frac{1/4}{z - 1/2} = z^{-1} \frac{1/4z}{z - 1/4} \rightarrow \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \Big|_{n \leftarrow n-1}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1)$$

2) Θα υπολογίσουμε την $H(z)$ ως μετασχηματισμό \mathcal{Z} της $h(n)$ του πρώτου ερωτήματος. Από τον ορισμό του μετασχηματισμού \mathcal{Z} :

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} u(n) - \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} z^{-n} u(n-1) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2z}\right)^n = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2z}\right)^n \cdot 2 \\ &= \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{1}{2z}}}_{|z| > \frac{1}{2}} - \frac{1}{4} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2z}\right)^n \cdot 2 - 2 \right] \\ &= \frac{z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \underbrace{\left[\frac{1}{1 - \frac{1}{2z} - 1} \right]}_{|z| > \frac{1}{2}} \\ &= \frac{z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2z}} \\ &= \frac{z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{1}{4} \frac{1}{z - \frac{1}{2}} \quad |z| > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3) α) **A' τρόπος**

Επειδή οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, ισχύει ότι $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \iff Y(z) = H(z)X(z) \iff y(n) = h(n) * x(n)$. Άρα εφαρμόζουμε τη συνέλιξη:

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left[u(k) - \frac{1}{2}u(n-1) \right] \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} u(n-k) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^k u(k)u(n-k) - \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^k u(k-1)u(n-k) \right] \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \left[\sum_{k=0}^n \left(\frac{3}{2}\right)^k u(n) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{2}\right)^k u(n-1) \right] \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \left[\frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{2}} u(n) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{2}\right)^k \frac{3}{2} u(n-1) \right] \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \left[\frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{2}} u(n) - \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^n}{1 - \frac{3}{2}} u(n-1) \right] \\ &= \left[3 \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] u(n) + \left[\frac{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] u(n-1) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[3u(n) - \frac{3}{2}u(n-1) \right] + \left(\frac{1}{3}\right)^n \left[-2u(n) - \frac{3}{2}u(n-1) \right] \end{aligned}$$

β) **B' τρόπος**

Γνωρίζουμε από το μετασχηματισμό \mathcal{Z} ότι:

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

και η είσοδος είναι:

$$x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) \implies X(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{3}} \quad \text{ROC}_x : |z| > \frac{1}{3}$$

Άρα η έξοδος θα είναι:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{z - \frac{1}{4}}{z - \frac{1}{2}} \frac{z}{z - \frac{1}{3}} \quad \text{ROC}_y : |z| > \frac{1}{2} \\ y(n) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{C \in \text{ROC}} Y(z) z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C \in \text{ROC}} \frac{z^n \left(z - \frac{1}{3}\right)}{\left(z - \frac{1}{2}\right) \left(z - \frac{1}{3}\right)} dz \\ &= \text{Res} \left[\dots @ z = \frac{1}{2} \right] + \text{Res} \left[\dots @ z = \frac{1}{3} \right] \\ &= \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}} \right] u(n) \\ &= \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{1}{2} \right] u(n) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[3u(n) - \frac{3}{2}u(n-1) \right] + \left(\frac{1}{3}\right)^n \left[-2u(n) + \frac{3}{2}u(n-1) \right] \end{aligned}$$

4) Για $y(-1) \neq 0$ δεν μπορώ να εφαρμόσω το:

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

γιατί δεν ισχύει και το $Y(z) = H(z)X(z)$.

Γράφουμε την αρχική εξίσωση και εφαρμόζουμε "μονόπλευρο" μετασχηματισμό Laplace:

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = x(n) - \frac{1}{4}x(n-1) \quad n \geq 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} y(n)z^{-n} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} y(n-1)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} x(n-1)z^{-n}$$

$$Y(z) - \frac{1}{2} \sum_{k=-1}^{\infty} y(k)z^{-k-1} = X(z) - \frac{1}{4} \sum_{k=-1}^{\infty} x(k)z^{-k-1}$$

$$Y(z) - \frac{1}{2}z^{-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k} + zy(-1) \right) = X(z) - \frac{1}{4}z^{-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} + zx(-1) \right)$$

$$\implies Y(z) \left[1 - \frac{1}{2}z^{-1} \right] = X(z) \left[1 - \frac{1}{4}z^{-1} \right] + \frac{1}{2}y(-1)z^{-1}$$

$$Y(z) = X(z) \frac{1 - 1/4z^{-1}}{1 - 1/2z^{-1}} + \frac{1/2y(-1)}{1 - 1/2z^{-1}}$$

$$Y(z) = X(z)H(z) + \frac{1}{2} \frac{z}{z - 1/2}$$

$$y(n) = \left[\left(\frac{1}{2} \right)^n \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{3} \right)^n \frac{1}{2} \right] u(n) + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^n}_{\text{λόγω αρχικών συνθηκών}} u(n)$$

5) Επειδή απαντήσαμε στο προηγούμενο ερώτημα με τις ίδιες αρχικές συνθήκες, μπορούμε με ασφάλεια να απαντήσουμε ότι:

$$y(n) = h(n) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^n u(n)$$